

Övning 7

den 18 november 2020 13:14

Cramers regel $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, $A_i = A$ med kolonn i utbytt mot $\vec{b}$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\left[A \mid \vec{b} \right] \sim \dots \begin{matrix} 4.5 \\ 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 7x_1 - 3x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}. \text{ söks } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 7 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) = 7 + 9 = 16$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{16} = \frac{3 \cdot 1 - 5 \cdot (-3)}{16} = \frac{3 + 15}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

$$\text{svar: } x_1 = \frac{9}{8} \text{ och } x_2 = \frac{13}{8}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{16} = \frac{7 \cdot 5 - 3 \cdot 3}{16} = \frac{35 - 9}{16} = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$$

6.1 $T: D \rightarrow V$
 definitionsmängd / domän $\rightarrow$ värdemängd / kodomän
 $T(\vec{x}) = \vec{w}$
 domänen är alla tillåtna $\vec{x}$ $\leftarrow$ kodomänen är alla $\vec{w}$'s vi kan få.
 $f: 3x$
 $f(2x) = 3 \cdot (2x) = 2(3x)$

Linjära transformationer kan vi uttrycka som matriser

$$[T]_E = A = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \dots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}$$

$\uparrow$
standardbasen

$$T(a\vec{x} + b\vec{y}) = aT(\vec{x}) + bT(\vec{y})$$

Vi ser var basvektorena hamnar $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

9) c) $T(x, y) = (-y, x)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x - 1 \cdot y \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \rightarrow [T]_E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $T(x, y) = (x^2, y)^T$, x är i kvadrat $\rightarrow T$ är inte linjär
 $[T]_E \vec{x} = \vec{b}$

16] söks linjär domän och kodomän till $w_1 = x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4$
 och se om transf. är linjär $w_2 = 3x_1 - 4x_2 - x_3^2 + x_4$

Lösning 1) transf. är ej linjär eftersom x_1 och x_3 är i kvadrat.

2) okända variabler $x_1, x_2, x_3, x_4 \rightarrow D = \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

3) "Lösningen" är w_1 och w_2 , $\rightarrow$ som vektorer blir det $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$
Alltså är $V = \mathbb{R}^2$

$$\left(\text{ex } V: \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{w}\| < 50 \} \right)$$

om $\vec{w}$ bara tar positiva värden: $V: \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^2 : w_i > 0 \text{ för } i=1, 2 \}$

kopplar till $\mathbb{R}^1$ $f(x) = x^2 \rightarrow V = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} \}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad D = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1 \}$$

$$V = \{ x \in [f_{\min}, f_{\max}] \}$$

givet: T är en linjär transformation och vi vet att $T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$
och att $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

söks: $[T]_E$

Lösning $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi vet att $[T]_E = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2)]$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{5}{5} T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5} T\left(5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5} T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

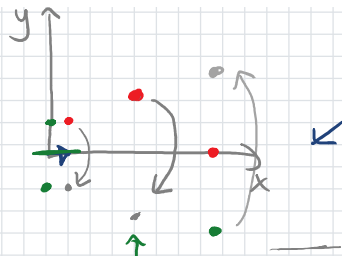
$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5} T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5} T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5} \left(T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right) - 2 T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right) \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2-12 \\ 11-16 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[T]_E = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2)] = \begin{bmatrix} -2 & 6/5 \\ -1 & 8/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

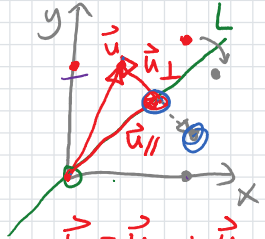
23] i $\mathbb{R}^2$: a) spegling läng x-axeln

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



b) spegling läng linje $y=x$ Lösning $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



$$L = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Låt } \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - 2\vec{u}_\perp = \vec{u} - 2(\vec{u} - \vec{u}_\parallel) = -\vec{u} + 2\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$$

$$= -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + 2 \frac{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\|\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (a+b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b-a \\ a+b-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Vid spegling kommer $\vec{u}_\parallel$ att vara oförändrad

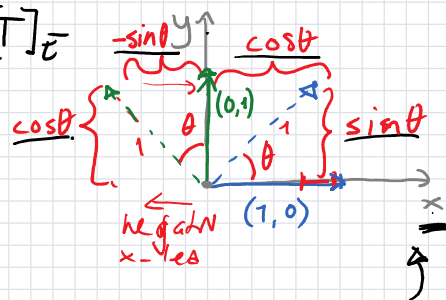
$$\vec{u} - \vec{u}_\perp = \vec{u}_\parallel, \vec{u}_\perp = \vec{u} - \vec{u}_\parallel$$

$$[T]_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vi har: $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som det ska

25] a) rotation 45° läng origo. Låt $[T]_E$

$$[T]_E = \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = R_\theta$$



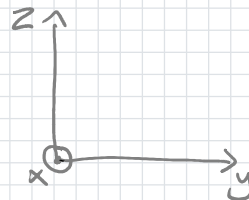
$$\text{här } \theta = 45^\circ \rightarrow [T]_E = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^3$: rotation läng x-axeln

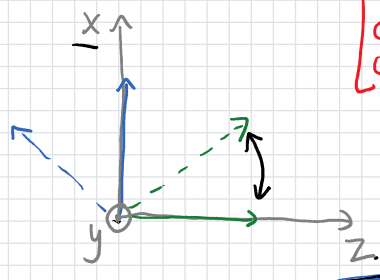
$$[T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

rotation läng y-axeln

$$[T]_E = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$



Ortogonal matris betyder att $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \quad \forall i, j \in [0, n]$ och $i \neq j$
 om $A = [\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n]$

ortonormal matris betyder också att $\|\vec{a}_i\| = 1$

A är ortonormal: $A\vec{x} = \vec{y} \rightarrow \|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$

$$\vec{x} \neq \vec{y}$$

$$\downarrow$$

$$A^{-1} = A^T$$

$$3] \begin{bmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ -9/25 & 4/5 & -12/25 \\ 12/25 & 3/5 & 16/25 \end{bmatrix}$$

ortogonal:

$$1 \& 2 : \frac{4}{5} \cdot 0 - \frac{9}{25} \frac{4}{5} + \frac{12}{25} \frac{3}{5} = 0$$

$$1 \& 3 : \frac{4}{5} \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{9}{25}\right) \left(-\frac{12}{25}\right) + \frac{12}{25} \frac{16}{25} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \cdot \quad 2 \& 3 : 0 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} \left(-\frac{12}{25}\right) + \frac{3}{5} \frac{16}{25} = 0$$

A^{-1} ? kolla längden på alla rader: rad 1: $\sqrt{\frac{16+9}{25}} = 1$

$$\text{rad 2: } \sqrt{\frac{81+400+144}{625}} = 1$$

$$\text{rad 3: } \sqrt{\frac{144+225+256}{625}} = 1$$

A är ortonormal

$$\rightarrow A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 4/5 & -9/25 & 12/25 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -12/25 & 16/25 \end{bmatrix}$$