

Övning 6

den 13 november 2020 07:54

regler för determinanter

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$\det(rA) = r^n \det(A), \quad A \text{ } n \times n \text{ matris, } r \in \mathbb{R}$$

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

$$\det(A^{-1}A) = \det(I) = 1$$

$$\det(A^T) = \det A$$

$$\det(A^{-1}) \det(A) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

42] 27] givet att A är en 3×3 matris och att dess determinant är 7

söks $\det(3A) = 3^3 \det(A) = 27 \cdot 7 = 189$

$A\vec{x} = \vec{b}$, om $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ är invertierbar och det ges en unik lösning $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$$\left[A \mid \vec{b} \right] \sim \left[I \mid \vec{c} \right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \underbrace{A^{-1}A}_{I} \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Skärmklipp gjort: 2020-11-13 08:26

2. Betrakta triangeln ABC med hörn i punkterna $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -3, 2)$ och C
a) Beräkna koordinaterna för vektorna $u = \vec{AB}$ och $v = \vec{AC}$.

2. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

är ett specialfall av en typ av matriser som ofta förekommer i olika tillämpningar, exempelvis i samband med diskretisering av differentialekvationer för numerisk lösning. Använd rad- eller kolonnoperationer för att beräkna determinanten av matrisen A .

Skärmklipp gjort: 2020-11-13 08:26

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \begin{array}{c|ccccc} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{R_1 + 3R_2} \begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{R_1 + 4R_2}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \end{array} \right] \xrightarrow{R_1+2R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \end{array} \right] \xrightarrow{R_1+3R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \end{array} \right] \xrightarrow{R_1+4R_4} \\
 & \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 5 & -4 & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \end{array} \right] \xrightarrow{R_1+5R_5} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{(-1) \\ (-1) \\ (-1) \\ (-1)}} = (-1)^4 \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \end{array} \right] \\
 & = (-1) \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \\ -1 & 1 & 1 & - & & \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{1 \\ (-1)(-1)(-1)(-1)}} = 1 \cdot (-1)(-1)(-1)(-1) \cdot 6 = 6
 \end{aligned}$$

3. Förklara med hjälp av egenskaperna hos determinanter varför det för kvadratiska matriser, A , i allmänhet gäller att $\det(A^T A) = (\det(A))^2$ och använd sedan detta för att beräkna $\det(A^T A)$ i specialfallet när

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Skärmklipp gjort: 2020-11-13 08:37

$$\det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (*)$$

v_i kofaktorutv. utvecklar
rad 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(0 \cdot 0 - 3 \cdot 1) + 1(1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = -3 + 2 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(0 \cdot 0 - 3 \cdot 3) + 1(3 \cdot 2 - 0 \cdot 1) + 2(1 \cdot 3 - 2 \cdot 0) = -9 + 6 + 6 = 3$$

$$(*) = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 3 = 1 + 12 = 13$$

$$\odot = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 3 = 1 + 12 = 13$$

$$\det(A^T A) = (\det(A))^2 = 13^2 = 169$$

svar $\det(A^T A) = 169$

kryssprodukt $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \rightarrow \vec{w} \perp \vec{u}$ och $\vec{w} \perp \vec{v}$

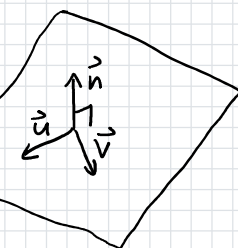
$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \rightarrow \text{blir maximal om } \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

om $\theta = 90^\circ \rightarrow = 0$

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0)^T, \vec{e}_y = (0, 1, 0)^T, \vec{e}_z = (0, 0, 1)^T$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x(u_y v_z - v_y u_z) + \vec{e}_y(u_z v_x - v_z u_x) + \vec{e}_z(u_x v_y - v_x u_y)$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y v_z - v_y u_z \\ u_z v_x - v_z u_x \\ u_x v_y - v_x u_y \end{bmatrix}$$


4.3

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ spänna upp ett parallelogram



$$1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 1 + 2 = 3$$

27

$$\vec{u} = (2, -6, 2), \vec{v} = (0, 4, -2), \vec{w} = (2, 2, -4)$$

hur stor volym spänner dessa upp?



Lösning

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2(4 \cdot (-4) - (-2 \cdot 2)) + 2(-6 \cdot (-2) - 2 \cdot 4) = 2(16 + 4) + 2(12 - 8) = 40 + 8 = 48 \text{ v.e.}$$

Svar parallelepipeden av vektorerna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ spänner upp volymen 48 v.e.

37] Vi vill hitta en vektor $\perp \vec{u} = (-6, 4, 2)$ och $\perp \vec{v} = (3, 1, 5)$

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-6) \\ (-6) \cdot 1 - 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 36 \\ -18 \end{bmatrix}$$

kontroll! $\vec{w} \cdot \vec{u} = 18 \cdot (-6) + 36 \cdot 4 + (-18) \cdot 2 = -108 + 144 - 36 = 144 - 144 = 0$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = 18 \cdot 3 + 36 \cdot 1 - 18 \cdot 5 = 18 \cdot 3 + 18 \cdot 2 - 18 \cdot 5 = 0$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

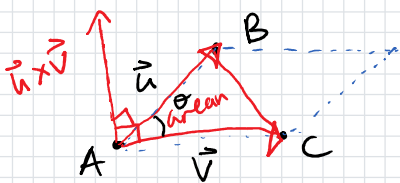
2. Betrakta triangeln ABC med hörn i punkterna $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -3, 2)$ och $C = (4, 1, 0)$ i $\mathbb{R}^3$.

a) Beräkna koordinaterna för vektorerna $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

b) Använd kryssprodukten för att beräkna arean av triangeln ABC .

c) Använd skalärprodukten för att beräkna cosinus för vinkeln vid hörnet A .

Skärmklipp gjort: 2020-11-13 09:36



a) $\vec{u} = (2-1, -3-0, 2-1) = (1, -3, 1)$

$$\vec{v} = (4-1, 1-0, 0-1) = (3, 1, -1)$$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)(-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

arean av parallelogrammet $= |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 10^2} = \sqrt{4 + 16 + 100} = \sqrt{120} \approx 11$

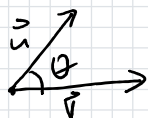
Det ger arean av triangeln $= \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} \approx \frac{11}{2} = 5.5$

Svar: 5.5 a.e

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3 - 3 - 1}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{-1}{11} = -1/11$$

33] $\vec{u} = (2, 3, -6)$, $\vec{v} = (2, 3, 6)$



$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| = 2^2 + 3^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49$$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 6 - 3 \cdot (-6) \\ (-6) \cdot 2 - 6 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (6)2 - 6 \cdot 2 & \\ & (6)2 - 6 \cdot 2 \\ & & 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{36^2 + 24^2} \approx 43$$

$$\sin \theta \approx \frac{43}{49}$$

svår: $\sin \theta \approx \frac{43}{49}$

2. Betrakta de två vektorerna

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm vektorprodukten $\vec{u} \times \vec{v}$ och kontrollera att den är ortogonal mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 2w_x - 4w_y - 6w_z \stackrel{!}{>} 0$
 $\vec{w} = (1, 0, 0)$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 & | & 0 \end{bmatrix} \sim$
 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix}$

$$w_x = 2w_y + 3w_z$$

Låt $w_y = t, w_z = s, t, s \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \vec{w} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$$

- b) Bestäm en vektor $\vec{w}$ så att trippelprodukten $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ är positiv (> 0).
 c) Bestäm alla vektorer $\vec{w}$ så att trippelprodukten $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ är noll.

Skärmklipp gjort: 2020-11-13 09:56

$f(x) = x^2 \rightarrow$ alla positiva tal $\quad A \vec{x} = \vec{b} \quad A \vec{x}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Skärmklipp gjort: 2020-11-13 10:03

$\text{Col } A = \{ \text{alla vektorer } \vec{b} \text{ vi kan få ut} \}$

$$\left[A \mid \vec{0} \right] \sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 5 & 3 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivots befinner sig i kolonn 1 och 3

pivots befinner sig i kolonn 1 och 3

$$\text{Låt } A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4 \ \vec{a}_5]$$

Col A = span { de kolonnvektorer i ^{ursprungliga} A som motsvarar pivotkolonnerna }

$$= \text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_3 \} \neq \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$