

3.9] Delrum

hur många vektorer

eller lika många

$W \subseteq \mathbb{R}^n$ betyder att W byggs upp av färre vektorer än n , men vektorer av samma dimension

linjärt oberoende $\sum a_i \vec{x}_i = \vec{0} \rightarrow a_i = 0$ för $i = 1, 2, \dots, n$

linjärt beroende av $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rightarrow a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + a_3 \vec{x}_3 = \vec{0} \rightarrow a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 = -a_3 \vec{x}_3$

fler rader än kolonner $\rightarrow$ linjärt beroende

$$\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$$

9] Visa att $\vec{u} = (1, 4, 4)$, $\vec{v} = (-1, 3, 6)$ och $\vec{w} = (-3, 2, 8)$ är linjärt beroende

Lösning

$$[\vec{u} \ \vec{v} \ | \ \vec{w}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 4R_1 \\ R_3 - R_2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2/7 \\ R_3/3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 + R_2 \\ R_3 - R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a_1 = -1 \\ a_2 = 2 \end{matrix} \rightarrow -1 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} = \vec{w}, \text{ alltså är vektorerna linjärt beroende}$$

$$13] \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 - 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 12x_2 + 5x_3 - 18x_4 = 0 \end{cases}$$

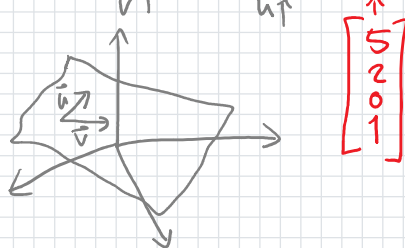
hitta vektorerna och delrummet W som spänner upp lösningssmängden

Lösning

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -6 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 12 & 5 & -18 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 + R_1 \\ R_3 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - 2R_2 \\ R_3 - R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} x_1 = -6x_2 - 11x_4 \\ x_2 \text{ fri} \\ x_3 = 8x_4 \\ x_4 \text{ fri} \end{matrix} \quad \text{Låt } \begin{matrix} x_2 = t \\ x_4 = s \end{matrix} \quad \text{och} \quad \begin{matrix} t, s \in \mathbb{R} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$



25] W är rummet som består av alla vektorer på formen $\vec{x} = (a, 0, a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$. Visa att det är ett delrum av $\mathbb{R}^4$. Vad är W för geometriskt objekt?

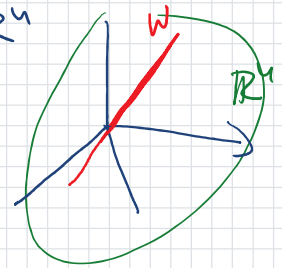
✓ $a \in \mathbb{R}$. Vi ser att det är ett delrum av $\mathbb{R}^4$. Vad är W för geometriskt objekt?

Lösning $\vec{x} = a(1, 0, 1, 0) \rightarrow W = \text{span}\{(1, 0, 1, 0)\}$

$(1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$, alltså är W ett delrum av $\mathbb{R}^4$

W spänns upp av 1 vektor $\rightarrow$ linje

V.S.V



3.5 15] Vi har $x+y+z=1$, skriv ut det som en generell lösning till det homogena systemet, plus en partikulär lösning.

Lösning

För det homogena systemet: $x+y+z=0$

$z = 1 - x - y$

Låt $x=t, y=s, t,s \in \mathbb{R}$. Det ger

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{x}_{\text{par}} + \vec{x}_{\text{homogena}}$$

4.1 determinanter

i $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ area av parallelogram $\rightarrow \det([u \ v])$ area $/2$

i $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ volym av parallelepiped



cofactors utveckla utmed rad 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

eller:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ex 9] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} = 3 (+1 - 5 \cdot 9) = -123$ $\swarrow$

kofaktorutv. utifrån kolumn 3

$$= (-1)^{1+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-4) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 5 (3 \cdot 9 - 0 \cdot 1) + (-4)(3 \cdot (-1) - 2 \cdot 9) = -5 \cdot 27 + 4 \cdot 3 = -123$$

27 +12

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3 \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 (5 - 6) = -12$$

radreduceringsmetoden

samma metoder som när vi gaussar. Men

- addera & subtrahera rader med varandra utan att ändra något
- byter plats på två rader $\rightarrow (-1)$ byter determinanten
- dividerar en rad med ett värde $\rightarrow$ multiplicera utifrån determinanten med samma värde.

15] $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 + 5R_1 \\ R_3 + R_1 \\ R_4 + 2R_1}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -24 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 12 & -6 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \cdot (-1) \\ R_4/3}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -24 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$

$= (-3)(-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -24 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 + 8R_4} 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4R_2} 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_4} =$

$= 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_4 - 3R_3} 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 13 = 39$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} R_1 - 3R_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 13 - 0 \cdot 1$$

$$3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 13 \end{vmatrix}$$

$$1 \cdot 13 - 0 \cdot (-4) = 1 \cdot 13$$