

Övning 4

den 6 november 2020 13:15

3.2] Matrisoperationer är kommutativa och associativa

$$a(A+B) = aB + aA \quad (ab)A = a(bA)$$

$\nearrow$
 $n \times m$ matriser

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$AB = I$$

$$2 \times 2 : A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\nearrow \begin{bmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix} \sim \text{radoperationer} \sim \begin{bmatrix} I & | & A^{-1} \end{bmatrix}$$

mål

$$\underbrace{(AB)^{-1}}_C = A^{-1} B^{-1}$$

3.2]
9]

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

söks A^{-1}

Lösning

$$\text{Formeln } A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\det(A)}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{kontroll: } AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-5 & 0 \\ 10-10 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$c) A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

21] $A = \begin{bmatrix} c & 1 \\ c & c \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ söks värdena på c så att A är invertierbar

$$A = \frac{1}{c^2 - c} \begin{bmatrix} c & -1 \\ -c & c \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{c^2 - c} \begin{bmatrix} -c & c \end{bmatrix}$$

nämnamn $\neq 0 \rightarrow c^2 - c \neq 0 \Leftrightarrow c(c-1) \neq 0$

$$\rightarrow c \neq 0$$

$$c \neq 1$$

för alla
↓

Svar: A är inverterbar $\forall c \neq 0$ och 1

teori inverterbar om:

- kan vi få A på reducerad trappform, A är en produkt av elementära matriser
- $A\vec{x} = \vec{0}$ bara har den triviala lösningen
och $A\vec{x} = \vec{b}$ bara har en unik lösning $\forall \vec{b}$
- $\det(A) \neq 0$

3.3
9] a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ söks A^{-1}

Lösning

Vi bildar $[A | I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 20 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2/10} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.2 & 0.1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - 5R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.2 & 0.1 \end{array} \right]$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.2 & 0.1 \end{array} \right]$$

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$

$$5 + (-10)/2 =$$

1) $A\vec{x} = \vec{0}$? $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 20 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 + R_2/2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$

$A\vec{x} = \vec{b}$

$x_1 = 0$
 $x_2 = 0$ } triviala lösningen!

$x_1 \neq 0$
 $x_2 \neq 0$ $\rightarrow$ unik lösning

Vi kommer att ha
2 pivots

$$ad - cb = 1 \cdot 0 - 5 \cdot 2 = -10 \neq 0$$

ex 3x3 matrix

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1/3 \\ R_2 - 2R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 7/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -10 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 7/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -28 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 + 2R_2/3 \\ R_3 - 4R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -49/3 & -1 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & -28 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 121 & 8 & -4 & 9 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3/121 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -49/3 & -1 & 2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & -28 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8/121 & -4/121 & 9/121 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 + \frac{49 \cdot R_3}{3} \\ R_2 + R_3 \cdot 28 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{363} & \frac{46}{363} & \frac{-43}{363} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-18}{121} & \frac{16}{121} & \frac{10}{121} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{121} & \frac{-4}{121} & \frac{9}{121} \end{array} \right] \begin{array}{l} -1 + \frac{49}{3} \cdot \frac{8}{121} = \frac{-363 + 384}{363} = \frac{21}{363} \\ \frac{2}{3} - \frac{49}{3} \cdot \frac{4}{121} = \frac{242 - 196}{363} = \frac{46}{363} \\ -\frac{4}{3} + \frac{49}{3} \cdot \frac{9}{121} = \frac{-484 + 441}{363} = \frac{-43}{363} \end{array}$$

$$-2 + \frac{28 \cdot 8}{121} = \frac{-2 \cdot 121 + 28 \cdot 8}{121} = -\frac{18}{121}$$

$$1 + \frac{28 \cdot (-4)}{121} = \frac{128 - 112}{121} = \frac{16}{121}$$

$$-2 + \frac{28 \cdot 9}{121} = \frac{-242 + 252}{121} = \frac{10}{121}$$

15] hitta alla C så att matrisen $A = \begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ är inverterbar

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} c & c & c & 1 & 0 & 0 \\ 1 & c & c & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - R_1/c \\ R_3 - R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & c & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d-1 & c-1 & -1/c & 1 & 0 \\ 0 & 1-d & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3/(1-c) \end{array}$$

Vi utgår här från att $c \neq 0$

vi måste utgå från att $c \neq 1$

Fall 1 $c \neq 0, c \neq 1$ Gaussa form

Fall 2 $c = 0$: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$ ej inverterbart

Fall 2 $c = 0$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ej inverterbart

Fall 3 $c \neq 1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ej invertierbar

1. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 8, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

4 obekanta
3 ekvationer
som högst bli en linje
 $4 - 3 = 1$

a) Använd Gausselimination för att överföra totalmatrisen för ekvationssystemet till reducerad trappstegsform.

b) Ange lösningmängden för ekvationssystemet med hjälp av den reducerade totalmatrisen.

Skärmklipp gjort: 2020-11-06 14:46

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & | & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 + R_2 \\ R_3 + R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 - R_3/2 \\ R_2 + R_3/2 \\ R_3/2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & | & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$

b) $x_1 = 3 + x_3$
 $x_2 = 4 - 2x_3$
 x_3 fri
 $x_4 = 5$

Låt $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ Det ger

$$\begin{cases} x_1 = 3 + t \\ x_2 = 4 - 2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

= min lösningssmängd där $t \in \mathbb{R}$