

Övning 3

den 5 november 2020 13:08

Teori

Reducera till reducerad trappform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & a \\ 1 & 5 & 2 & b \\ 4 & 6 & 1 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{array} \right]$$

antalet kolonner är antalet obekanta n
 antalet ekvationer $\leftarrow m$ är antalet rader
 Om $n > m \rightarrow$ obestämt system
 generell lösning

ex om rad med
 $0 \ 0 \ 0 \ | \ 5$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 =$
 inte konsistent

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = h - 5x_2 \\ x_2 \text{ fri} \\ x_3 = g \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 = h - 5t \\ \rightarrow x_2 = t, t \in \mathbb{R} \\ x_3 = g \end{array}$$

$\rightarrow$ generella lösning $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$

↑ punkt
 ↑ vektor med riktning Linje

1 Gauss-Jordan eliminering: skriv vad vi gör

$$\left. \begin{array}{l} 2.2 \quad 2.3 \\ \downarrow x_1 + \downarrow x_2 + \downarrow 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{array} \right\}$$

Vi har 3 obekanta
 x_1, x_2, x_3

söks: LÖS systemet för $x_1, x_2, x_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \end{array} \right]$

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2+R_1 \\ R_3-3R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1+R_2 \\ -R_2 \\ -R_3/2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3-5R_2} \\ \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 26 & 59 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1-7R_3/26 \\ R_2+5R_3/26 \\ R_3/26}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 17-7 \cdot 59/26 \\ 0 & 1 & 0 & -9+59 \cdot 5/26 \\ 0 & 0 & 1 & 59/26 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{17 \cdot 26 - 7 \cdot 59}{26} = \frac{29}{26} \\ x_2 = \frac{-9 \cdot 26 + 59 \cdot 5}{26} = \frac{61}{26} \\ x_3 = \frac{59}{26} \end{array} \right\} \text{ svar}$$

om vi har lika många obekanta som ekvationer

→ unik lösning $a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + a_3 \vec{x}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \vec{x}_i = \vec{0}$
 $A \vec{x} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ den triviala lösningen $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

43] $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y - 17z = a+2 \end{cases}$

söks a så att det
 1.) skaas lösning
 2.) finns unik lösning
 3.) finns oändligt med lösh.

$A \vec{x} = \vec{b}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -17 & a+2 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 - R_1 - R_2]{R_2 - 3R_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -22 & a-4 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3/22]{-R_2/7} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4/7 & 10/7 \\ 0 & 0 & 1 & (4-a)/22 \end{array} \right]$

3 obekanta

→ systemet är konsistent
 kommer alltid finnas lösning

③ pivots beroende av a

$\frac{22}{4-a}$
 $a \neq 4$

→ beroende av a kommer lösningen alltid vara unik

3.1] teori

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix}$

m x n matris

rader

kolonner

ekvationer

obekanta

Exempel om inkonsistent

$5x + 3 = 0 \rightarrow x = -3/5$

$7x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{7} = 0$

→ alltså inkonsistent
 det finns ingen lösning

konsistent är när
 en eller fler lösningar
 finns. → så länge ingen
 rad har

kolonnvektor $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, radvektor $[a \ b \ c]$

$\vec{v} = (a \ b \ c)^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Transponat

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$

Vi har 2 matriser A och $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

operationer

• add. och subtraktion $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$

• multiplikation

- matris med vektor

for matrismultiplikation måste #kolonner
 = #rader i vektorn

$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$
 $m \times n \times n \times 1 = m \times 1$ vektor

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$

4 rns. → så länge ingen rad har

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

 något $\neq 0$ i HL och $= 0$
 i VL

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \times 3 \times 1 = 2 \times 1$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

3×2

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \vec{u}^T \vec{v}$$

$\vec{u}$ och $\vec{v}$ är kolonnvektorer

- matris med matris

AB

$m \times n \times n \times k = m \times k$ matris

$$A(c \cdot \vec{u}) = c(A\vec{u})$$

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ c \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

11]
$$\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{array} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 9 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$

$\vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

A är $2 \times 3 \times 3 \times 1 = 2 \times 1$

15] söks hitta $(AB)_{23} = c_{23}$ med så få multiplikationer och
 Låt $AB = C = [c_{ij}]$ rad 2 kolonn 3 additiver som möjligt.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad C \text{ är } 3 \times 3 \text{ matris}$$

$$(AB)_{23} = [6 \ 5 \ 4] \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 24 + 15 + 20 = 59$$

$$C = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & 59 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

om A är $n \times n$ matris

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$$

23] Söks det värde på k så att lösningarna är konsistenta

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Lösning

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ k \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot k + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+1 \\ k+2 \\ -1 \end{bmatrix} = (k+1)k + 1(k+2) - 1 =$$

$$= k^2 + k + k + 1 = (k+1)^2 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow k \text{ måste vara } -1$$