

5] Delrummet $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ges av $x - 2y + z = 0$. Låt $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den l.n.j. avb.

a) Sökes bas $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ till $\mathbb{R}^3$ så att $V = \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x - 4y + 6z \\ 3x - 6y + 9z \end{bmatrix}$$

Lösning

Vi har $V = \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Steg 1: hitta $\vec{u}, \vec{v}$

$$x - 2y + z = 0 \rightarrow x = 2y - z \quad \text{Låt } y = t \in \mathbb{R} \quad \text{där } z = s \in \mathbb{R} \quad \text{där } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

För en bas B till $\mathbb{R}^3$ krävs ytterligare en vektor som är l.n.j. oberoende med $\{\vec{u}, \vec{v}\}$

$\rightarrow \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ som vi vet är ortogonal och därmed linjärt oberoende automatiskt

$$\rightarrow \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{där } B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Sökes visa att $T(\vec{x}) \in V \quad \forall \vec{x} \in V$

Lösning Vi söker $\text{Im} T$

steg 1: hitta $[T]$. $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x - 4y + 6z \\ 3x - 6y + 9z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$$\rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

steg 2. $\text{Col}([T])$: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 - R_2]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{pivot: kolonn 1}$

$$\rightarrow \text{Col}([T]) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi vill se om $\text{Col}([T]) \in V$?

$\rightarrow$ sätter in $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i planets ekvation: $1 - 2 \cdot 2 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$
Alltså ligger $\text{Col}([T])$ i V

$\rightarrow$ omvänt $\vec{x}$ så kommer $T(\vec{x})$ vara $\vec{x}$ på V . Alltså står det att

$$T(\vec{x}) \in V \quad \text{om } \vec{x} \in V$$

• Metod 2: tag $\vec{x} \in V$ på parameterframställning: $\vec{x} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$

$$[T]\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t - s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \dots \text{vektor} \quad \text{Tillräckligt för varje val av } t, s$$

• Metod 2: tag $x \in V$ på parameterformställning: $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$

$$\underline{[T]_x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \dots \text{vektor. Tittar nu för varje val av } t \text{ och } s, \text{ om det ligger i planet?}$$

(sätt in i planets ekvation och se att det blir noll)

$$\underline{\underline{\rightarrow x - 2y + z = 0}}$$

c) söks $[T]_B$

Lösning Vi har $[T]_E$ (standardbasen) och kan då få $[T]_B$ genom

$$\underline{[T]_B = P_{E \rightarrow B} [T]_E P_{B \rightarrow E}}$$

$$\text{Vi har } P_{B \rightarrow E} = \begin{bmatrix} [\vec{u}]_E & [\vec{v}]_E & [\vec{w}]_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har $P_{E \rightarrow B} = P_{B \rightarrow E}^{-1}$ som vi ber:

$$\left[P_{B \rightarrow E} \mid I \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \text{Lös gaussning} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} I & & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ & 1 & 1 & -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ & & & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{array} \right] \text{spå lva}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow [T]_B &= P_{B \rightarrow E}^{-1} [T]_E P_{B \rightarrow E} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{räkna} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & 20 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \leftarrow \text{svar} \end{aligned}$$

6] 9×9 matris M med multiplikationstabellen som element.
 $M_{ij} = i \cdot j$, $i, j = 1, 2, \dots, 9$

söks rang M

Lösning

Vi tittar på rad i i matrisen M

$$M_i = [i \cdot 1 \quad i \cdot 2 \quad i \cdot 3 \quad i \cdot 4 \quad i \cdot 5 \quad i \cdot 6 \quad i \cdot 7 \quad i \cdot 8 \quad i \cdot 9] = i [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]$$

på varje rad.

$$\text{rad 1: } [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9] \leftarrow$$

$$\text{rad 2: } 2[1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9] \leftarrow$$

När vi löser rangen av M ställer vi upp $[M]$ och gör radoperationer. För att hitta pivot element.

Det gör att på varje rad M_i kan vi ta $M_i - i M_1$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow 1 \text{ pivotkolumn}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \text{ pivotkolumn} \downarrow \text{rang } M = 1$$

b) sökas Visa att $1^2 + 2^2 + \dots + 9^2 = 285$ är egenvärde till M vad är egenvektorn till M då? Övriga λ s?

Lösning

M har rang $1 < 9$, enligt dimensionsatsen har vi:
 $\text{rang } M + \dim(\text{Nul}(M)) = n = 9 \rightarrow \dim(\text{Nul}(M)) = 9 - \text{rang } M = 8$

Alltså till $M\vec{x} = \vec{0}$ har vi 8 st vektorer

$$M\vec{x} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{x}$$

(åtminstone) 8 st egenvärden med $\lambda = 0$ och egenvektorer
 $\vec{x} \in \text{Nul } M$

• $\lambda = 285$.

och testar

Vi betraktar $\vec{v} = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]^T$ eftersom $\vec{v}^T$ finns i varje rad av M
 det ger att $M_i \vec{v} = i [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9]^T = i (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2) = i 285$
 = varje rad i $M\vec{v}$

Det ger att varje rad i $M\vec{v}$ kommer att ha radsumman 285

$\Rightarrow$ Vi kan bryta ut 285 $\Rightarrow M\vec{v} = 285\vec{v}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = 285 \vec{v}$$

alltså har vi hittat att $\lambda = 285$ är egenvärde med egenvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

Teori

Om en matris A $n \times n$ har n olika egenvärden

$\rightarrow$ har n linj. oberoende egenvektorer $\rightarrow A$ är diagonaliserbar

bevis

antag motsatsen. Vi har n st. olika egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ men antar linj. ber. egenvektorer.

$\rightarrow \vec{v}_r = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_{r-1} \vec{v}_{r-1}$ (1) där alla c_i inte är noll (om $\vec{v}_r$ linj. ber och $r \leq n$)
 multiplicera A med (1)

$$\lambda_r \vec{v}_r = c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + c_{r-1} \lambda_{r-1} \vec{v}_{r-1} \quad (2) \quad \text{Vi tar (2) - } \lambda_r (1)$$

$$\lambda_r \vec{v}_r - \lambda_r \vec{v}_r = c_1 (\lambda_1 - \lambda_r) \vec{v}_1 + \dots + c_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) \vec{v}_{r-1} = \vec{0}$$

men vi har att $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ är linj. ber. och $(\lambda_i - \lambda_r) \neq 0$ för $i = 1, \dots, r-1$

→ $c_1, c_2, \dots, c_{r-1}$ måste vara noll → v_r inte är en linj. kombination av de andra vektorerna → motber.s. Alltså är v_r linj. ober. till alla andra vektorerna → generellt r → måste gälla för alla $r \leq n$ → n linj. ober. egenvektorer → drag. bar.

För sk drag.: A $n \times n$ matris: ssk och se om n st linj. ober egenvektorer.

1) Finns n st unika egenvärden → diagonaliserbar

2) Lös ut all λ . Lös sen varje egenrum till varje unika egenvektor → om antalet vektorer i egenrummen är samma som antalet egenvärden med samma värde → diagonaliserbar. (algebraisk mult. = geometrisk)

3.28. 2017-01-11

1. a) För vilka värden på k har ekvationssystemet (med avseende på x, y och z)

$$\begin{aligned} kx + ky + z &= 3 \\ 2x + ky + z &= 2 \\ 4x + 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

en entydig lösning, ingen lösning, oändligt många lösningar?

b) Lös ekvationssystemet för $k = 1$.

Skärmklipp gjort: 2020-12-10 14:11

Lösningsskiss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & k & 1 & 3 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right]$$

- entydig: $\det A \neq 0$ eller 3 st pivots.
- generell lösn.: färre än 3 st pivots oändligt med lösn.
- ingen lösn.: inkonsistent system OBS: tänk på eventuellt div. med k .

2. P är det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkten $(1, 0, 0)$ och linjen $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

a) Bestäm en normalvektor och en ekvation till P .

(3 p)

b) Bestäm ortogonalprojektionen av punkten $(2, 4, 2)$ på linjen som går genom origo och punkten $(0, 1, -1)$.

(3 p)

Skärmklipp gjort: 2020-12-10 14:12

a) Låt 2 vektorer i P . tag $t=0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in P$
 bilda $\vec{OP} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{OP} \times \vec{u} = (A \ B \ C) \rightarrow A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

b) Låt $Q = (2, 4, 2)$, $R = (0, 1, -1) \rightarrow L: \vec{r} = t\vec{OR} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
 $\text{proj}_L \vec{OQ} = \frac{\vec{OR} \cdot \vec{OQ}}{\|\vec{OR}\|^2} \vec{OR}$

3. Låt $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ vara övergångsmatrisen från basen $\underline{V}$ till basen $\underline{W}$ av ett delrum U av $\mathbb{R}^4$.

Skärmklipp gjort: 2020-12-10 14:12

a) Bestäm övergångsmatrisen från bas $\underline{W}$ till bas $\underline{V}$.

(3 p)

b) Låt $f: U \rightarrow U$ vara en linjär avbildning som uppfyller $[f]_{\underline{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm $[f]_{\underline{V}}$.

(3 p)

(Med $[f]_B$ menas matrisen för avbildningen f med avseende på basen B .)

Skärmklipp gjort: 2020-12-10 14:13

$$T = P_{\underline{V} \rightarrow \underline{W}} \quad a) \quad P_{\underline{W} \rightarrow \underline{V}} = T^{-1} \quad \text{Lös ut. } T^{-1} = \frac{1}{4-3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad [f]_{\underline{V}} = P_{\underline{W} \rightarrow \underline{V}} [f]_{\underline{W}} P_{\underline{V} \rightarrow \underline{W}} = T^{-1} [f]_{\underline{W}} T = \dots$$

4. En linjär avbildning $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieras av formeln $L(\vec{x}) = \vec{e}_3 \times \vec{x}$ för alla vektorer $\vec{x}$. Här är $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och med $\times$ menas kryssprodukten.

a) Bestäm standardmatris till $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

b) L transformerar planet $x_3 = 0$ till sig själv. Beskriv geometriskt hur vektorer i detta plan transformeras.

c) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenvektorer till L .

$$\begin{matrix} x & y & z \\ y & -x & \\ z & x & y \end{matrix}$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 =$$

a) $[L] = [L(\vec{e}_1) \ L(\vec{e}_2) \ L(\vec{e}_3)] = [\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \ \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \ \vec{e}_3 \times \vec{e}_3] = [\vec{e}_2 \ -\vec{e}_1 \ \vec{0}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) planet är $P_{x_3=0}$



skriv upp parameterframställning

$$\vec{x} \in P: \vec{x} = t\vec{e}_1 + s\vec{e}_2, s, t \in \mathbb{R}$$

$$[L]\vec{x}$$

$$\rightarrow \text{alt: } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ beskriv i ord vad vektorn innebär
rita helst!

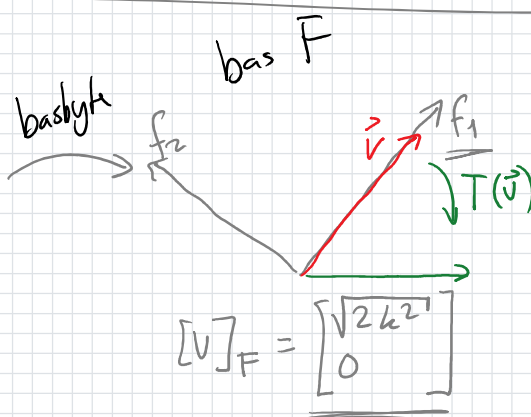
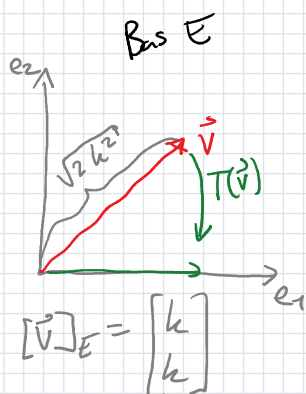


c) $0 = \det(\lambda I - [L]) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3$ ut egenvärden

Lös ut egenvärden

$$[A - \lambda I | \vec{0}] \text{ Lös ut egenvektorer till varje egenvärde}$$

$$[\lambda I - A | \vec{0}]$$



$$F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$$

$[T]_F$
måste multipliceras
med en vektor i F
och $[T]_F [v]_F$ ger
avvektor i F

$$[T]_F = P_{F \leftarrow E} [T]_E P_{E \rightarrow F}$$

$$P_{F \rightarrow E} = \begin{bmatrix} \text{basvektorer i F} \\ \text{skrivna enligt E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\vec{f}_1]_E & [\vec{f}_2]_E \end{bmatrix}$$