

21) Vad är $Q = (x_1 - x_2)^2$ för defmat?

Lösning

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

eigenvärden: $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$
 $\rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$
 eigenvärdena är $\geq 0 \rightarrow Q$ är positivt semidefinit

9.1) Vektorrum: krav:

vektorrum av funktioner

f, g etc.

där $f = g$ om $f(x) = g(x) \forall x$

vektorrum av polynom

$P_i = \{ \text{alla polynom upp till grad } i \}$

ex $P_2 = \{ \text{alla andragradspolynom} \}$

1. V sluten under addition: $\vec{u} + \vec{v} \in V$ om $\vec{u}, \vec{v} \in V$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$
5. $\forall \vec{u} \exists -\vec{u} \in V: \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
6. V sluten under skalärprodukt: $k\vec{u} \in V$ om $\vec{u} \in V$ och $k \in \mathbb{R}$
7. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
8. $(k+l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
9. $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
10. $1\vec{u} = \vec{u}$

9) Vilka är delrum av P_2 ?

a) $\{ \text{alla polynom på formen } a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ där } a_0 = 0 \}$

$$\rightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ och } q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

1. $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$, om $a_0 = 0$ och $b_0 = 0 \rightarrow a_0 + b_0 = 0$

2.

3.

...

10.

Ser att alla uppfylls $\rightarrow$ svar: Ja.

g) $\{ \text{alla polynom där } a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ har } a_0, a_1, a_2 \text{ heltal} \} = W$

6. Tag $k = 1,2 \rightarrow kp(x) = \underbrace{1,2a_0}_{b_0} + \underbrace{1,2a_1}_{b_1}x + \underbrace{1,2a_2}_{b_2}x^2$

b_0, b_1, b_2 är inte heltal om a_0, a_1, a_2 är heltal $\rightarrow kp(x)$ tillhör inte mängden: $p(x) \in W$, men $kp(x) \notin W \rightarrow$ alltså ej sluten under skalärprodukt $\rightarrow W$ ej ett delrum av P_2

19) visa att $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ är en bas

för M_{22} (= vektorrummet av alla 2×2 matriser), skriv $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ som en komb. av basvektorer

Lösning

För att de ska kunna vara en bas måste de vara linj. oavh.

$aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 = 0$ Om $a-d=0$ är enda lösn. $\rightarrow$ linj. ober.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c & b \\ a+d & c \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+d=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

men $b=0$ och $c=0 \rightarrow a+b+c=0 \rightarrow a=0$

därför $a+d=0$ allt $d=0 \rightarrow$ Alla är linj. ober. och är 4 st. så de kan utgöra en bas för M_{22}

$$\begin{bmatrix} a+b+c & b \\ a+d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b=2 \\ c=3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a=6-2-3=1 \\ d=5-1=4 \end{matrix}$$

svar: $A = A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4$

21) $\vec{p}_1 = 1+2x+x^2$, $\vec{p}_2 = 2+9x$, $\vec{p}_3 = 3+3x+4x^2$. Visa att $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ är en bas för P_2 och skriv $\vec{p} = 2+17x-3x^2$ som en linj. komb. av basvektorer

Lös

$$0 = a\vec{p}_1 + b\vec{p}_2 + c\vec{p}_3 = a(1+2x+x^2) + b(2+9x) + c(3+3x+4x^2) = (a+2b+3c) + (2a+9b+3c)x + (a+4c)x^2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 2a+9b+3c=0 \\ a+4c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 9 & 3 & | & 0 \\ 1 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 4 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 3 \text{ pivots ger triviala lösn.}$$

$\rightarrow$ alltså är $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ linj. ober. och de är 3 basvektorer så de kan utgöra en bas för P_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 2 \\ 2 & 9 & 3 & | & 17 \\ 1 & 0 & 4 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 + 2\vec{p}_2 - \vec{p}_3$$

9.3] 3.] Visa att T är en linj. transformation, $T: P_2 \rightarrow P_3$, $T(p) = xp(x)$

1) Kräv $T(\vec{0}) = \vec{0}$

test: $T(\vec{0}) = x \cdot \vec{0}(x) = 0$ check!

2) Kräv: $T(a\vec{p} + b\vec{q}) = aT(\vec{p}) + bT(\vec{q})$

$$\text{test: } T(a\vec{p} + b\vec{q}) = x(a\vec{p} + b\vec{q})(x) = xa\vec{p}(x) + xb\vec{q}(x) = a \cdot x\vec{p}(x) + b \cdot x\vec{q}(x) = aT(\vec{p}) + bT(\vec{q}) \quad \text{check}$$

svar: båda kraven uppfylls, alltså är T en linj. transf.

13] $T: V \rightarrow V$, fixerad och $\vec{x}_0 \in V$, $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$. Är $T(\vec{x}) = \vec{x}_0 + \vec{x}$ linj. transf?
Lös

Kolla kolv: 1) $T(\vec{0}) \stackrel{!}{=} \vec{0}$ för lmf. transf. (kolv)
 $T(\vec{0}) = \vec{x}_0 + \vec{0} = \vec{x}_0 \neq \vec{0} \rightarrow T$ ej en lmf. transf.

Exenta 2017-03-13 $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, L_1 : linjen som går igenom P och Q
 L_2 : linjen som är parallell med $\vec{u}$ och går genom P

a) sökes parameterframställning av L_1 och L_2
Lösn.
 L_1 : linjen går genom P och Q. Bilda $\vec{PQ} = \begin{bmatrix} -1-1 \\ 3-1 \\ 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow L_1: \vec{x} = P + t\vec{PQ}, t \in \mathbb{R}$
 $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
 L_2 : linjen går genom P och är parallell med $\vec{u}$. Det ger

$L_2: \vec{x} = P + s\vec{u}, s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är våra parameterframställningar

b) sökes bestämt ekvationen för det plan som innehåller linjerna L_1 och L_2

Lösn.

Planet ska innehålla P och både $\vec{PQ}$ och $\vec{u}$. Vi bildar normalen
 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2+2 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ som är $\perp$ mot alla vektorer i planet.

Det ger planets ekv. $4(x-p_x) + 4(y-p_y) + 0(z-p_z) = 0 \Rightarrow 4x + 4y = 4(1+1) = 8$

$\rightarrow$ svar: $4x + 4y = 8$

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2) $A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 & 10-t \\ 1 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & t \end{bmatrix}$ a) sökes värden på t så att $A(t)$ är invertierbar.
Lösn. Vi vet att om $A(t)$ invertierbar $\Leftrightarrow \det(A(t)) \neq 0$

$\rightarrow \det A(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 10-t \\ 1 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & t \end{vmatrix} = t(1) + 1(-10-t) + (10-t)(1) = t - 10 - t + 10 - t = -t \neq 0$
 Det ger att $A(t)$ är invertierbar för $t \neq 0$

b) något värde på t så att $A(t)\vec{x} = \vec{0}$ har oändligt med lös. Lös den mängden.

Lösn. Om $A(t)\vec{x} = \vec{0}$ har oändligt med lös. $\Leftrightarrow \det(A(t)) = 0$

$\rightarrow \det A(t) = -t \rightarrow t = 0$. $[A(0) | \vec{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Det ger $x_1 = x_3$ Låt $x_3 = s \in \mathbb{R}$, det ger $\vec{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}$ som är lösningen.
 $x_2 = -10x_3$
 x_3 fri

3) $V \subseteq \mathbb{R}^4$ ett delrum ger det linjära hölje med $\vec{u} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
 $V = \text{span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

a) sökes icke-trivial linjär relation mellan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Lösn.
 Vi letar efter $x_1\vec{u} + x_2\vec{v} = \vec{w} \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/5 & 2/7 \\ -1/3 & 2/5 & 1/7 \\ 1/3 & 1/5 & 2/7 \\ 2/3 & 1/5 & 3/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$

Lös.
 Vi letar efter $x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} = \vec{w} \rightarrow \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/5 & 1/7 \\ -1/3 & 2/5 & 1/7 \\ 1/3 & 1/5 & 3/7 \\ 2/3 & 1/5 & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \begin{bmatrix} 35 & 21 & 30 \\ -35 & 42 & 15 \\ 35 & 21 & 30 \\ 70 & 21 & 45 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2+R_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-2R_1}} \begin{bmatrix} 35 & 21 & 30 \\ 0 & 63 & 45 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1+R_4 \\ R_2+3R_4 \\ R_4/3}} \begin{bmatrix} 35 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \\ x_2 = \frac{5}{7} \end{matrix}$$

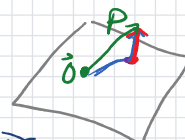
Svar: $\vec{w} = \frac{3}{7} \vec{u} + \frac{5}{7} \vec{v}$

b) söks beräkna avståndet från punkten $P = [1 \ 1 \ 1]^T$ till V

Lösning Vi ser att $\vec{0} \in V$. Det ger att punkten P kan skrivas som

$$\vec{OP} = \vec{OP}_{\parallel V} + \vec{OP}_{\perp V}$$

$\swarrow$ parallell med V $\searrow$ ortogonal mot V



Det ger att avståndet (det minsta) mellan P och V är

$$\|\vec{OP}_{\perp}\| = \|\vec{OP} - \vec{OP}_{\parallel V}\| = \|\vec{OP} - \text{proj}_V \vec{OP}\|$$

Vi inf. komb. av $\vec{u}$ och $\vec{v}$, räcker att projicera på $\vec{u}$ och $\vec{v}$

$$\|\vec{OP} - \frac{\vec{OP} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} - \frac{\vec{OP} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}\|, \quad \vec{OP} \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1-1+1+2}{3} = 1$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \frac{1}{3^2} (1^2 + 1^2 + 1^2 + 4) = \frac{7}{9}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1+2+1+1}{5} = 1$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{25} (1+4+1+1) = \frac{7}{25}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{avståndet} &= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{(7/9)} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{7/25} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 - 3/7 & -5/7 \\ 1 + 3/7 & -10/7 \\ 1 - 3/7 & -5/7 \\ 1 - 6/7 & -5/7 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7-8 & -7-8 \\ 7+3 & -10-7 \\ 7-3 & -7-5 \\ 7-6 & -7-5 \end{bmatrix} \right\| = \\ &= \frac{1}{7} \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{18}}{7} = \frac{3\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

4] $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (0, x)$ a) söks alla egenvärden och tillhörande vektorer

Lösning Vi bestämmer $[F]$: $[F] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \rightarrow [F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

egenvärden: $0 = \det(\lambda I - [F]) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

egenvektorer: $[F] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = 0, x_2 \text{ fritt} \rightarrow x_2 = t \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

egenrummet $E_0 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

b) Bestäm om $[F]$ är diagonaliserbar

Lösning

Vi har algebraisk multiplicitet 2 för $\lambda=0$ (2 rötter)
men endast dimension 1 på E_0
 $\rightarrow [F]$ kan ej vara diagonaliserbar enligt sats.