

För diggande

motivation som  
krävs på tentan  
för rotationsmatriser

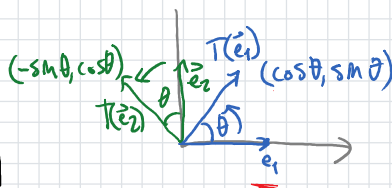
$\mathbb{R}^2$ :

1) Visa allt geometriskt genom att visa var basvektorn hamnar och skriva

$$[T] = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2)] = \dots$$

där  $T(\vec{e}_1)$  och  $T(\vec{e}_2)$  läses från grafen

→ OBS måste då markera x och y (för rotationer med sinus och cosinus) i grafen för varje basvektor, räcker ej att bara visa en av dem eller en generell



behövs för fullständig lösning

2) Skriv: "Vi har standardrotationsmatrisen för rotation moturs med en vinkel  $\theta$ ,  $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ "

$$\text{Det ger } [T] = \{R_\theta \text{ med } \theta = \text{vinkeln}\} = \begin{bmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

räcker ej att bara skriva ut

$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$  utan motivationen ovan, och måste verkligen nämna att jag använder mig av standardmatrisen.

i  $\mathbb{R}^3$  rotation kring axel:

Rita och resonera var varje basvektor hamnar. Viktigt att skriva  $[T] = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ T(\vec{e}_3)]$  och lösa (värdena grafiskt, skriva upp dem tydligt eller och sen sätta in i matris.

Låt säga rotation kring  $\vec{e}_2$ -axeln. Visa

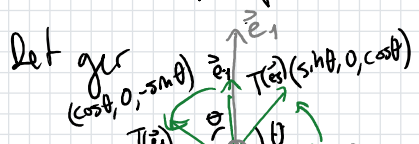
$$[T] = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ T(\vec{e}_3)] \text{ resonera allt på axeln kommer att bestå}$$

$$\rightarrow T(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$$

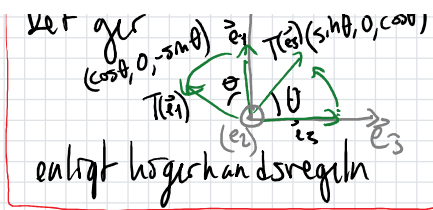
$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & e_1 \\ e_3 & e_1 & e_2 \end{matrix}$

Allt i  $\vec{e}_3\vec{e}_1$ -planet (obs notera högerhands ordningen) kommer att roteras i planet och inget hamnar i  $\vec{e}_2$ -riktningen.  $\rightarrow T(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 = T(\vec{e}_3) \cdot \vec{e}_2 = 0$

Vi tittar på planet  $\vec{e}_3\vec{e}_1$  i  $\mathbb{R}^2$



1) Läs grafiskt som i 2D-fallet ovan. Rita allt skriv tydligt också med  $T(\vec{e}_1) = \dots \ T(\vec{e}_2) = \dots$



1) Lös grafiskt som i 2D-fallet ovan. Rita allt skriv tydligt också med  $T(\vec{e}_1) = \dots T(\vec{e}_2) \dots$

Viktigt här att skapa ett högerhands system och att hålla koll på axlarna. (skriv uttrycket som ovan) med gaff.

$$T(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}, T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

Sen sätt in i  $[T]$

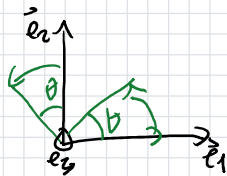
(alltså räcker inte det jag skrivit här själv, men ska kombineras med det uttrycket som i  $\mathbb{R}^2$  som görs grafiskt)

2) Vid rotation kring  $e_2$ -axeln ska vi inte lösa

på något annat sätt än 1). Kring  $\vec{e}_1$  eller  $\vec{e}_3$  kan vi göra följande:

Lös  $T$  kring rotationsaxeln kring ovan och titta på planet som byggs upp av de andra vektorna  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  planet eller  $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ -planet

ex. rotation kring  $\vec{e}_3$ -axeln.



"När vi ser i på rotationen i planet ser det ut som standard-rotationsmatrisen för rotation moturs kring origo

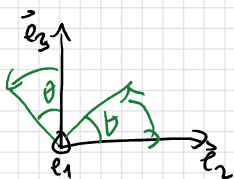
$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Detta motsvarar vår rotation kring  $\vec{e}_3$ -axeln när vi reducerat en dimension

Eftersom  $T(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_3 = T(\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = 0$  kan vi skriva blockmatrisen

$$[T] = \begin{bmatrix} R_\theta & & T(\vec{e}_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{" (} T(\vec{e}_3) \text{ motiverad ovan)}$$

Ps. rotation kring  $\vec{e}_1$ -axeln



När vi ser i på rotationen i planet ser det ut som standard-rotationsmatrisen för rotation moturs kring origo, men i  $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ -planet istället för  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ -planet.

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Detta motsvarar vår rotation kring  $\vec{e}_1$ -axeln när vi reducerat en dimension och är i  $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ -planet

Eftersom  $T(\vec{e}_1) \cdot \vec{e}_3 = T(\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = 0$  kan vi skriva blockmatrisen

$$[T] = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & 0 & 0 \\ & R_\theta & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Sätt in värden och det är svaret.

Allt detta behövs för fullständig lösning.

Allt detta behövs för fullständig lösning.

16] hitta vektors  $P$  så att  $P^{-1}AP$  är diagonal för  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

Lösning

Se om  $A$  kan diagonaliseras.

$$\lambda: 0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ -6 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1) \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

eigenvektorer:  $\lambda_1: [A - \lambda_1 I | 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 6 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1/3 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2/3 \\ x_2 \text{ fri} \end{matrix}$  Låt  $x_2 = t \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{t}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ . Det ger } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2: [A + I | 0] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & | & 0 \\ 6 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/2, R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 \text{ fri} \end{matrix}$$
 Låt  $x_2 = t \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  och ger

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och antalet egenvärden = 2

Vi har samma multiplicitet algebraiskt och geometriskt  $\Rightarrow A$  är diagonaliserbar med  $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  och det ger

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

8.3]  $A$  är ortogonalt diag. bar om  $A$  är symmetrisk och  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  från olika egenrum är ortogonala

$$\text{om vi har } \lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

$$\rightarrow \text{vi kan göra } P \text{ ortogonal} \rightarrow P^{-1} = P^T$$

Vi kan använda Gram-Schmidt på varje egenrum

$$\text{om } \lambda_1 = \lambda_2 \rightarrow \text{algebraisk multiplicitet 2. } E_{\lambda_{1,2}} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

Vanligtvis är  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  ej ortogonala  $\rightarrow$  Gram-Schmidt för att fixa det.

$$A^m = P D^m P^T = P \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^m \end{bmatrix} P^T$$

, Cayley-Hamilton theorem

$$\text{om } \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i = c_0 + c_1 \lambda^1 + c_2 \lambda^2 + \dots = 0$$

$$\sum_{i=0}^n c_i A^i = 0$$

12] ortogonalt diagonalisera  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Lösning

$$\text{märker } A^T = A \rightarrow \text{normalt} \rightarrow \text{1, 1, 1, 2, ...}$$

16) ortogonal matris  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Lösning Noterar  $A^T = A \rightarrow$  potential att diagonalisera

1) egenvärden:  $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \left( (\lambda - 2)^2 - 1 \right) + 1(1 - (\lambda - 2)) + 1(1 - (\lambda - 2)) =$   
 $(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) + 2(3 - \lambda) =$   
 $= (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) - 2(\lambda - 3) = (\lambda - 3)((\lambda - 2)(\lambda - 1) - 2) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda) = (\lambda - 3)\lambda(\lambda - 3)$   
 $\rightarrow \lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 0$

2) egenvektorer  $\lambda_{1,2}: [3I - A | 0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$  Låt  $x_2 = t$   
 $x_3 = s, t \in \mathbb{R}$   
 $\rightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \rightarrow E_{\lambda=3} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$

$\lambda_3: [A | 0] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_2]{R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_2]{R_1/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = x_3$   
 $x_2 = x_3$   
 $x_3 = t$   
 $\rightarrow \vec{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E_{\lambda=0} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3) ortonormalisera

$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ortonormalisera  $E_{\lambda=3}$ . Låt  $\vec{f}_1 = \vec{v}_1$ , och  $\vec{u}_1 = \vec{f}_1 / \|\vec{f}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$   
 $\vec{f}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2} \vec{f}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{u}_2 = \vec{f}_2 / \|\vec{f}_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4) Vi får nu  $P = [\vec{u}_1 \vec{u}_2 \vec{u}_3] = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

en diagonal matris  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A = P D P^T$  med matriserna ovan.

20) Lös  $A^{10}$  givet  $A = \begin{bmatrix} -30 & 16 \\ -56 & 30 \end{bmatrix}$

Lösning

diagonalisera. 1) egenvärden:  $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 30 & -16 \\ 56 & \lambda - 30 \end{vmatrix} = (\lambda + 30)(\lambda - 30) + 56 \cdot 16 =$   
 $= \lambda^2 - 30^2 + 896 = \lambda^2 - 4 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

2) egenvektorer:  $\lambda_1: [2I - A | 0] = \begin{bmatrix} 32 & -16 & | & 0 \\ 56 & -28 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2/28]{R_1/16} \begin{bmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - R_1]{R_1/2} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = x_2/2$   
 $x_2 = t$   
 $\rightarrow \vec{x} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) egenvektorer.  $\lambda_1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/28} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2 \text{ fri}$   
 $\lambda_2: \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/2} \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 1/2 R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \frac{1}{2} x_2 \quad \lambda_2 + x_2 = t \in \mathbb{R}$   
 $\rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$   
 $\rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{4+1}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$   
3) bilda  $P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$   
4) Det ger  $A^{10} = (PDP^T)^{10} = P D^{10} P^T = P \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & (-2)^{10} \end{bmatrix} P^T = P \cdot 1024 I P^T = 1024 P I P^T = 1024 P P^T = 1024 I = \begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1024 \end{bmatrix}$

8.4) kvadratisk form  $a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 + \{ \text{alla möjliga } a_k x_i x_j \text{ korstermer med } i \neq j \}$   
kan skrivas som  $\vec{x}^T A \vec{x} = Q_A(\vec{x})$  ( $n+1 \times n+1$ )  
Vi gör substitutionen  $\vec{x} = P \vec{y} \rightarrow (P \vec{y})^T A (P \vec{y}) = \vec{y}^T P^T A P \vec{y}$   $A = P D P^T$   
om  $A$  ortogonalt diagonaliserbar med  $P \rightarrow P^T A P = D$   $D = P^T A P$   
 $\rightarrow \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T D \vec{y} \rightarrow$  alla korstermer försvinner  
 $\rightarrow = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$   
 $\vec{x}^T A \vec{x} \begin{cases} > 0 \text{ positivt definit för } \vec{x} \neq 0 \\ \geq 0 \text{ pos. semidefinit} \\ < 0 \text{ negativt definit} \\ \leq 0 \text{ neg. semidefinit} \end{cases}$   
både pos. och neg. indefinit

8] Vi har  $Q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$   
Vi vill hitta en ortogonal basbytes matris  $P$  så att korstermerna försvinner.

Lösning  
 $Q = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4/2 & -4/2 \\ 4/2 & 5 & -8/2 \\ 4/2 & -8/2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Vi vill göra substitutionen  $\vec{x} = P \vec{y}$  där  $P$  ska vara ortogonal med  $A$ 's egenvektorer  
 $\rightarrow$  egenvärden:  $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)((\lambda - 5)(\lambda - 5) - 16) - 2(8 + 2(\lambda - 5)) + 2(-8 - 2(\lambda - 5)) =$   
 $= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 25 - 16) - 2 \cdot 2 \cdot (4 + (\lambda - 5)) =$   
 $= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 9)$



$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{\lambda-5} \\ \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{\lambda-5} \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+25-16) - 2 \cdot 2 \cdot 2(4+(\lambda-5)) = \\
 & = (\lambda-2)((\lambda-1)(\lambda-9)) - 8(\lambda-1) = (\lambda-1)((\lambda-2)(\lambda-9) - 8) = (\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+10) = \\
 & = (\lambda-1)(\lambda-10)(\lambda-1)
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 10, \lambda_{2,3} = 1$$

$$\text{egenvektorer: } \lambda_1: \left[ 10I - A \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1/2 + 2R_2 \\ R_2 + R_3 \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ R_2/9 \\ R_1 - 4R_2/9 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -x_3/2 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \text{ fri} \end{array} \quad \text{Låt } x_3 = t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{x} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{Det ger}$$

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1+4+4}} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2: \left[ A - I \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array} \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 + 2x_3 \\ x_3, x_2 \text{ fri} \end{array}$$

$$\dots \text{ Det ger } \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3]$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det ger } Q = \vec{y}^T D \vec{y} = 10y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$