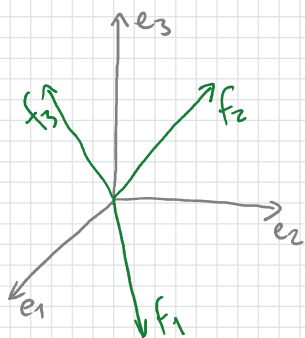


7.11



$E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ standardbas.

$F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ ny bas.

$\forall$ kan skriva en vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ i E eller F

$$[\vec{v}]_E = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_E$$

$$[\vec{v}]_F = b_1 \vec{f}_1 + b_2 \vec{f}_2 + b_3 \vec{f}_3 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}_F$$

$$a_i = \text{proj}_{\vec{e}_i} \vec{v}, \quad b_i = \text{proj}_{\vec{f}_i} \vec{v}$$

ortonormal bas ggr att $\|[\vec{v}]_E\| = \|\vec{v}\| = \|[v]_F\|$

Basbyte: $[\vec{v}]_E = P_{F \rightarrow E} [\vec{v}]_F$, där $P_{F \rightarrow E} = [\text{basvektorer i } F]_E \dots$

pss. $[\vec{v}]_F = P_{E \rightarrow F} [\vec{v}]_E$, men om $P_{E \rightarrow F}$ inverterbar $P_{E \rightarrow F}^{-1} [\vec{v}]_F = [\vec{v}]_E$

$$\rightarrow P_{E \rightarrow F}^{-1} = P_{F \rightarrow E}, \quad P_{E \rightarrow F} = P_{F \rightarrow E}^{-1}$$

annan metod $[B \text{ basvektorer} | F \text{ basvektorer}] \sim \dots \sim [I | P_{F \rightarrow B}]$ Gauss

4] hitta $[\vec{w}]_B$ om $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ delrum, där $\vec{w} = [5 \ -12 \ 3]^T = [\vec{w}]_E$
 $\vec{v}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\vec{v}_2 = [2 \ 2 \ 0]^T$, $\vec{v}_3 = [3 \ 3 \ 3]^T$

Lösning

$$\text{Vi börjar med att bilda } P_{B \rightarrow E} = [\vec{v}_1]_E \ [\vec{v}_2]_E \ [\vec{v}_3]_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi vill gå från $E \rightarrow B$

$$P_{E \rightarrow B} = P_{B \rightarrow E}^{-1} : \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3/3]{R_1-R_2, R_2-R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right]$$

$$P_{E \rightarrow B} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{w}]_B = P_{E \rightarrow B} [\vec{w}]_E = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 30 - 72 \\ -36 - 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -42 \\ -45 \\ 6 \end{bmatrix}$$

6] samma bas som i 4], hitta $[\vec{u}]_E$ om $[\vec{u}]_B = [7 \ -2 \ 1]^T$

$$[\vec{u}]_E = P_{B \rightarrow E} [\vec{u}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 4 + 3 \\ -4 + 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

11] Om ortonormal bas bevaras längden.

så vi har $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}^T$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}^T$ och $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ för $\mathbb{R}^2$

a) hitta $\vec{u}, \vec{w}$ om $[\vec{u}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T$ och $[\vec{w}]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}^T$

Lösning

$$\text{vi vill gå från } B \text{ till } E: P_{B \rightarrow E} = [\vec{v}_1]_E [\vec{v}_2]_E = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{u} = P_{B \rightarrow E} [\vec{u}]_B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = P_{B \rightarrow E} [\vec{w}]_B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

b) så vi $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\|[\vec{u}]_B\|$, $\|[\vec{w}]_B\|$

Lösning

$$\|\vec{u}\| = \frac{1}{5} \sqrt{49+1} = \frac{\sqrt{50}}{5} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \sqrt{2}$$

$$\|[\vec{u}]_B\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = \|\vec{u}\|$$

$$\|\vec{w}\| = \frac{1}{5} \sqrt{13^2+16^2} = \frac{1}{5} \sqrt{425} = \sqrt{\frac{425}{25}} = \sqrt{17}$$

$$\|[\vec{w}]_B\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} = \|\vec{w}\|$$

ortonormal:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{3 \cdot 4}{25} - \frac{4 \cdot 3}{25} = 0$$

$$\|\vec{v}_1\| = \frac{1}{5} \sqrt{3^2+4^2} = \frac{\sqrt{25}}{5} = 1$$

$$\|\vec{v}_2\| = \frac{1}{5} \sqrt{4^2+3^2} = 1$$

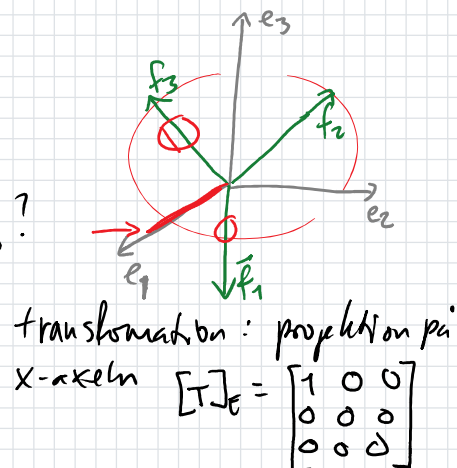
8.1] matriser är alltid specificerade utifrån bas.

$$[T]_B \neq [T]_E$$

hur gör vi när $[T]_E$ är givet och vill ha $[T]_B$?

$$[T]_E \neq \underbrace{P_{B \rightarrow E}}_{\text{output}} [T]_B$$

$[T]_B$ är samma utifrån att multipliceras med en vektor från höger samma i basen B



$$[T]_E = [\text{proj.} \dots]$$

$$\rightarrow [T]_E = P_{B \rightarrow E} [T]_B P_{E \rightarrow B} = P_{B \rightarrow E} [T]_B P_{B \rightarrow E}^{-1}$$

multipliceras med vektor i bas E

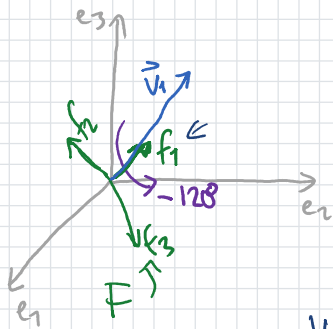
multipliceras i bas B

byter input i bas E till bas B

Uppgift 2. Den linjära avbildningen $R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ är rotationen kring vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ med vinkel $-\frac{2}{3}\pi$ enligt högerhandregeln. $-\frac{2}{3}\pi = -120^\circ$ moturs

- (a) Bestäm standardmatrisen till R : $[R]_E = A_E^3$
 (b) Den linjära avbildningen $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av $L(\vec{x}) = R(\vec{x}) - 2\vec{x}$. Bestäm rangen av L .
 (c) Bestäm nollrummet (kärnan) till L . Vad är dimension av bildrummet av L ?

Skärmklipp gjort: 2020-12-03 10:50



$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

(Vi vet standard rotationen kring första axeln i ett koordinatsystem är
 $R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ enligt tidigare seminarium)

Vi vill hitta en ON-bas så att rotationsmatrisen ovan kan användas (kring en axel).

Vi bildar $\vec{f}_1 = \vec{v}_1 / \|\vec{v}_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ → Rotationen kommer att ske kring $\vec{f}_1$
 enligt given rot. axel

Nu vill vi hitta $\vec{f}_2, \vec{f}_3 \perp \vec{f}_1$. Vridningen sker ju i ett plan ortogonalt mot $\vec{f}_1$.
 planet beskrivs av normalen $\vec{n} = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ i planets ekv.
 → $x + y + z = 0$ (planet går genom origo så vi kan sätta D=0 i planets ekv.)

två punkter i planet är $(1, -2, 1)$, $(-2, 1, 1)$
 bilineärvektor mellan

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 - (-2) \\ -2 - 1 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ kollar ortogonalitet: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3 - 3 = 0$ Ok!
 $\vec{v}_2$ ligger i planet. Låt $\vec{f}_2 = \vec{v}_2 / \|\vec{v}_2\| = \frac{1}{\sqrt{9+9}} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nu kan vi bilda $\vec{f}_3$ enligt högerhandsregeln
 $\vec{f}_3 = \vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
 obs ordning!

Det ger $P_{F \rightarrow E} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ← Ortonormal
 → $P_{F \rightarrow E}^{-1} = P_{F \rightarrow E}^T$

$$[R_{-120^\circ}]_F = \left\{ \theta = -120^\circ \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_{F \rightarrow E}^{-1} : P_{F \rightarrow E}^T$$

$$A = P [R] P^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 A_E &= P_{F \rightarrow E} [R]_F P_{F \rightarrow E}^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3-1 \\ 2\sqrt{2} & 0 & -3-1 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4-6+2 & 4+6+2 & 4-4 \\ 4-4 & 4-4 & 4+8 \\ 4+6+2 & 4-6+2 & 4-4 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{Svar: matrisen till } R \text{ är } [R]_E &= A_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

8.2] kvadratiske matriser A och C (av samma storlek) är lika om det finns en inverterbar matris P så att $A = PCP^{-1}$, $C = P^{-1}AP$ Alltså en typ av basbyte!

$\rightarrow \det A = \det(PCP^{-1}) = \det(P)\det(C)\det(P^{-1}) = \det(\underbrace{PP^{-1}}_I)\det(C) = \det C$

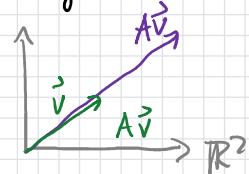
A, C samma rang, nollrumsdimension, trace, egenvärden etc

Egenvärden

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är skalärer så att $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ där $\vec{v}$ är egenvektorer

$\rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow$ ger λ

$[A - \lambda I \mid \vec{0}] \rightarrow$ ger egenvektorer $\vec{v}$



A är diagonaliserbar om A har n linj. obero. egenvektorer och kan då skrivas som en diagonal matris $D = P^{-1}AP$

om alla egenvärden är reella och olika $\rightarrow$ diag. bar.

$\rightarrow$ det finns lika många egenvektorer som egenvärden, och det måste vara n st. (om A $n \times n$ matris)

3] visa att $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ inte är lika

Lösna

$$\det A = 1, \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) + 2(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{2} = 0$$

Alltså är A ej lik med B , eftersom $\det A \neq \det B$

10] söks hitta egenvärden och algebraisk och geometrisk multiplicitet till

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mult. ett egenvärde
har

antallet egenvektorer
till
egenvärdet.
väge minst

Lösning

$$\lambda: \det(A - \lambda I) = 0 \text{ eller } \det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)((\lambda-1)(\lambda-3)) + 2(-2(\lambda-3)) = (\lambda-3)((\lambda-1)(\lambda-1) - 4) =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4) = 0 \quad \lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$$

$$\lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$

$\lambda = 3$ har multiplicitet 2

$\lambda = 1$ har multiplicitet 1

egenvektorer: $\lambda = 3$: $\left[3I - A \mid \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{\substack{R_1/2 \\ R_2-R_1 \\ R_3+R_1}} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_2 \text{ fri} \\ x_3 \text{ fri} \end{matrix}$

Låt $x_2 = t \in \mathbb{R}$, $x_3 = s \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Det ges egenvektorna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{geometrisk multiplicitet } 2.$$

Vi ser $\lambda = 3$: multiplicitet 2 för båda.

$\lambda = 1$: $\left[A - 1 \cdot I \mid \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{smallmatrix} \right] \xrightarrow{\substack{-R_1/2 \\ -R_2/2 \\ R_3+R_1+R_2}} \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix} \right] \rightarrow \text{trivial lös.}$

$\rightarrow$ geometrisk multiplicitet är 0
algebraisk var 1 } inte samma
 $\rightarrow$ ej dragbar.