

Övning 10

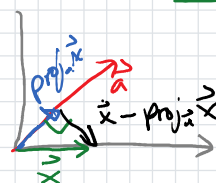
den 26 november 2020 15:13

7.7] $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$ är den ortogonala projektionen av $\vec{x}$ på $\text{span}\{\vec{a}\}$

$\rightarrow \vec{x} - \text{proj}_{\vec{a}} \vec{x} \perp \text{span}\{\vec{a}\}$

$$\|\text{proj}_{\vec{a}} \vec{x}\| = \frac{|\vec{x} \cdot \vec{a}|}{\|\vec{a}\|}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Om $T(\vec{x}) = \text{proj}_{\vec{a}} \vec{x} \rightarrow [T] = \frac{1}{\underbrace{\vec{a}^T \vec{a}}_{\text{matris}}} \underbrace{\vec{a} \vec{a}^T}_{\text{matris}}$ $[T] = [T(e_1) \dots]$

Om $W \subseteq \mathbb{R}^n$ definierar man varje vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ skrivs som $\vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n$ där $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$ för $i \in [1, n]$ ex. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

Om basen för W beskrivs av $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\}$ är

$$\vec{x} = \text{proj}_{\vec{x}_1} \vec{x} + \dots + \text{proj}_{\vec{x}_n} \vec{x} = \text{proj}_W \vec{x}$$

Om $T(\vec{x}) = \text{proj}_W \vec{x} \rightarrow T(\vec{x}) = M(M^T M)^{-1} M^T \vec{x}$, där $M = [\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n]$

7.7.] 15] Hitta standardmatrisen för den ortogonala projektionen av $\mathbb{R}^3$ på $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ och kolla rang

a) $\vec{a}_1 = (3, -4, 1)^T$, $\vec{a}_2 = (2, 0, 3)^T$, $\|\vec{a}_1\|^2 = 9 + 16 + 1 = 26$, $\|\vec{a}_2\|^2 = 4 + 9 = 13$

Lösning

Vi vet att $[T] = [T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad T(\vec{e}_3)]$

$$T(\vec{e}_1) = \text{proj}_{\vec{a}_1} \vec{e}_1 + \text{proj}_{\vec{a}_2} \vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{a}_1\|^2} \vec{a}_1 + \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{a}_2\|^2} \vec{a}_2 = \frac{3}{26} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 13} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 9+8 \\ -12 \\ 3+12 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 17 \\ -12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = \text{proj}_{\vec{a}_1} \vec{e}_2 + \text{proj}_{\vec{a}_2} \vec{e}_2 = \frac{-4}{26} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0}{26} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ -4 \end{bmatrix}$$

p.s.s $T(\vec{e}_3) = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 15 \\ -4 \\ 19 \end{bmatrix}$

$$[T] = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 17 & -12 & 15 \\ -12 & 16 & -4 \\ 15 & -4 & 19 \end{bmatrix}$$

Vi ser att $[T]^T = [T]$

Annän metod

$$T(\vec{x}) = M(M^T M)^{-1} M^T \vec{z} \quad M = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Lös ekvationen ovan för $[T]$

men jag föredrar starkt metoden ovan istället
mindre komplicerat

rang

$$\begin{bmatrix} 17 & -12 & 15 \\ -12 & 16 & -4 \\ 15 & -4 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_3 \\ R_3 + R_2}} \begin{bmatrix} 2 & -8 & -4 \\ -12 & 16 & -4 \\ 3 & 12 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1/2 \\ R_2/4 \\ R_3/3}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 + 3R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -8 & -7 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \text{ pivots} \rightarrow \text{rank}([T]) = 2$$

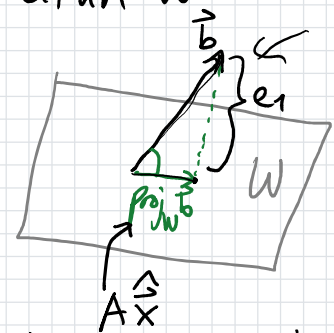
7.8] Bästa approx. av $\vec{b}$ som inte tM hör ett delrum W
är $\vec{w} = \text{proj}_W \vec{b}$

$$\|e\| = \|\vec{b} - A\hat{x}\| \leq \|\vec{b} - A\tilde{x}\|$$

$$\underline{A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}} \quad \underline{\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}}$$

förutsätter att A har full rang.

Minsta kvadratsmetoden



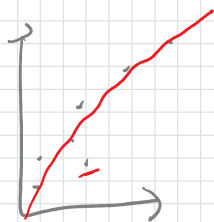
Vi kan ej lösa $A\hat{x} = \vec{b}$
 $\rightarrow \underline{A\hat{x} \neq \vec{b}}$

12] ex
tabel $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & -1 & 0 & 4 \end{array}$

som vi ska göra en MKM på tM
 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Lösning

Vi ska försöka lösa vektorn $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ med $A\hat{a} = \underline{\underline{y}}$
Vi bildar matrisen A som



$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{bmatrix}, \text{ där varje kolonn har datapunkter så att varje rad blir } y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$$

$$\text{och } \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vi bildar } A^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 -1 + 4 \\ -2 + 8 \\ -2 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \\ 6 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

$[A^T A \mid A^T \vec{b}]$ och gaussar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 10 & 6 \\ 6 & 10 & 18 & 14 \end{array} \right] \sim \text{Gaussa} \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2.5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right]$$

alltså är MKM-lös.
 $a_0 = 5$
 $a_1 = -2.5$
 $a_2 = 2.5$

$$y = 5 - 2.5x + 2.5x^2$$

extra 20130107 #5

tenk uppgift hade 2 lös. $U = RI$, $\underline{U} = U_0 + RI$

$$\begin{array}{c} I \\ U \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right.$$

→ Löser ut båda med MKM

$$\vec{e}_1 = \|A_1 \vec{I} - \vec{u}\|, \quad \vec{e}_2 = \|A_2 \vec{I} - \vec{u}\|$$

error det e_i som är minst är approx. v. värt

7.9] orthonormal bas (t.ex standardbasen) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sådan att $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$ ortogonal bas $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} a \in \mathbb{R} & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$
 som automatiskt är linjärt oberoende. $\rightarrow$ kalla skalärprodukter i alla kombinationer
 $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{x} \cdot \vec{u}_i) \vec{u}_i$ (ortonormal)

V varje delrum har en ortogonal bas

Gram-Schmidt för att hitta basen

Vi har icke-ortonormal bas $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$

1. Låt $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$ och $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 / \|\vec{v}_1\|$ $\leftarrow$ längd 1

2. $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1$ och $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 / \|\vec{v}_2\|$

3. $\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{w}_3$ och $\vec{u}_3 = \vec{v}_3 / \|\vec{v}_3\|$

Fortsätt till steg n: $\vec{v}_n = \vec{w}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \text{proj}_{\vec{v}_i} \vec{w}_n$

$\rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ortogonal bas, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ orthonormal bas

$\vec{v}_i \in$ ortogonal bas
 $\vec{u}_i \in$ orthonormal bas



$\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1 \vec{u}_1$
 är rätt men gör inte det!

7.9]
 30]

Gram-Schmidt på basen $\vec{w}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\vec{w}_2 = (3, 7, -2)^T$, $\vec{w}_3 = (0, 4, 1)^T$

Lösning

1. Låt $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$, $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 / \|\vec{v}_1\| = \vec{w}_1$

2. Låt $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{3}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$
 $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

3. $\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{53} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \cdot 53 - 28 \\ 53 + 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 55 \end{bmatrix}$
 $\|\vec{v}_3\| = \frac{1}{53} \sqrt{30^2 + 105^2} = \frac{\sqrt{11925}}{53}$

$\vec{u}_3 = \vec{v}_3 / \|\vec{v}_3\| = \frac{1}{53} \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 105 \end{bmatrix} \cdot \frac{53}{\sqrt{11925}} = \frac{1}{\sqrt{11925}} \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 105 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{477}} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 21 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

förkortar
med 5

förkortar
med 3

ortonormala basen är $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{53}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$

ex] skriv vektor $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i basen $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$

ex) skriv vektor $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i basen $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{bmatrix} \vec{e}_2 \sim \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \quad \vec{c}_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + c_3 \vec{u}_3 = \vec{e}_2$$

$$\underline{\underline{[S]_E}} \quad [\vec{e}_2]_{U\text{-basen}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \vec{c}$$

Svar: $[e_1]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$

För att se om en bas är ortogonal

→ kolla att alla vektorer i basen är ortogonala
ortonormal bas

→ kolla skalärprodukten är lika med 0 mellan olika vektorer och 1 med sig själv



Tenta 20130102 #5

I	0	2	4	6
U	1	7	8	10

frågan: är $U = U_0 + RI$ eller $U = RI$ rätt modell enligt MKM?

a) ställer upp de två modellerna utifrån datapunkter och ekvationer

$$\rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & I_1 \\ 1 & I_2 \\ 1 & I_3 \\ 1 & I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

↑
för modell $U = RI$ ↑
för modell $U = U_0 + RI$

$$b) A_1^T A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 16 + 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \end{bmatrix}, \quad A_1^T \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 + 32 + 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 56 \end{bmatrix} [R] = \begin{bmatrix} 106 \end{bmatrix} \rightarrow R = \frac{106}{56} = \frac{53}{28}$$

$$A_2^T A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 56 \end{bmatrix}, \quad A_2^T \vec{u} = \begin{bmatrix} 26 \\ 106 \end{bmatrix}$$

$$\text{Tar fram } (A_2^T A_2)^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 56 - 12^2} \begin{bmatrix} 56 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 106 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4.56 & -12^2 & -12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -20 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ R \end{bmatrix} = (A_2^T A_2)^{-1} \vec{c} = \begin{bmatrix} 2,3 \\ 1,4 \end{bmatrix}$$

c) Vi kan ska vi välja?

$$1) e_1 = \|A_1[R] - \vec{u}\| = \left\| \frac{53}{28} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \right\| \approx 3,7$$

$$2) e_2 = \|A_2 \begin{bmatrix} U_0 \\ R \end{bmatrix} - \vec{u}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,3 \\ 1,4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \right\| \approx 2,4$$

vi ser att $e_1 > e_2 \rightarrow$ modell 2 bygger upp bäst lös. enligt MKM

Svar: $U = 2,3 + 1,4I$ är bästa lösningen enligt mkM.