SF1629 - DIFFERENTIALEKVATIONER OCH TRANSFORMER II - ÖVNING 12

KARL JONSSON

Innehåll

Denna tolfte övning (nästa sista innan KS'en måndagen den 10 dec) kommer att handla om sista delarna av Kapitel 5 samt första delarna av kapitel 6. Några speciella inre produkt-rum.

Tabell 1. Kvarvarande övningar i kursen och preliminärt innehåll för denna grupp.

Övning 13	Övning 14	Övning 15
fre 5 dec 8-10 i E52	**fre 12 dec 13-15 i V33**	**ons 17 dec 15-17 i E52**
Sturm-Liouville problem och Fouriertransformen och Repetition	Fourier och Z-transformen och Distributionsteori	Distributionsteori Dirichlets problem på enhetsskivan och repetition

Frågor, förslag eller kommentarer? Maila i så fall karljo@kth.se.

1. Överblick

Vi har sett att inre produktrum där 'vektorerna' är funktioner kan användas till att approximera vissa funktioner som linjärkombinationer av andra funktioner. Ett vanligt exempel att betrakta är rummet $L^2(I, w)$ där I är ett intervall på $\mathbb{R}$ och w, som kallas för viktfunktionen, är en positiv, kontinuerlig och reellvärd funktion. Detta rum består av alla funktioner f som uppfyller att $\int_I |f(x)|^2 w(x)\, dx$ är ett ändligt tal. (För ett motexempel ta t.ex. $I = (0, 1)$ och låt $w(x) = 1$ för alla $x \in I$, då har vi att $f(x) = x^{-1} \notin L^2(I, w)$ men vi har att $f(x) = x^{-1/3} \in L^2(I, w)$).

Den inre produkten på rummet $L^2(I, w)$ ges av, där vi har $f, g \in L^2(I, w)$

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}w(x)\, dx. \tag{1.1}$$

En övning här kan vara att försöka se varför vi måste anta att w är reellvärd och att $w(x) > 0$.

som ger upphov till normen

Date: 28 november 2014.

$$||f||_{L^2(I,w)} = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_I |f(x)|^2\, w(x)\; dx} \tag{1.2}$$

Beroende på hur man väljer I och w så får man olika inre-produktrum och olika avståndsbegrepp, i och med att normen förändras då I och w förändras.

Mängden av alla polynom

Vi har ofta också att mängden av alla polynom P är ett underrum till $L^2(I, w)$. Vi kan då skriva att

$$P = \text{linjära höljet}\left\{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\right\}. \tag{1.3}$$

Men denna bas $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$ kommer allmänt sett inte vara en ortogonal bas för P. Vi vet att om vi vill kunna approximera en funktion i ett inre produktrum så kan vi använda projektionsformeln, men denna förutsätter att underrummet som vi projicerar på beskrivs med en ortogonal bas. Om man använder Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess (tillsammans med ett val över hur man ska normera vektorerna, ON-processen ger 'riktningar för vektorerna', vi kan sedan välja hur långa vi ska ta dem, tar vi längd =1 så får vi en ortonormerad bas) så får man några av de så kallade 'Klassiska polynomen'

Varför är polynom bra att jobba med?

Dyker upp i lösningen av Schrödingerekvationen för väteatomen, i vinkeldelen (θ, ϕ).

Legendre: $I = (-1, 1)$ och $w(x) = 1$. De första polynomen

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \ldots \tag{1.4}$$

och allmänt gäller

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n\left((x^2-1)^n\right), \quad ||P_n(\cdot)||^2_{L^2((-1,1),1)} = 2/(2n+1).$$

Som ovan, fast dyker upp radiella delen r.

Laguerre: $I = (0, \infty)$ och $w(x) = e^{-x}$. De första polynomen

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = -x + 1, L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2), L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6), \ldots \tag{1.5}$$

och allmänt gäller

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} D^n\left(x^n e^{-x}\right), \quad ||L_n(\cdot)||_{L^2((0,\infty),e^{-x})} = 1.$$

Dyker upp i lösningen av Schrödingerekvationen för harmoniska oscillatorn.

Hermite: $I = (-\infty, \infty)$ och $w(x) = e^{-x^2}$. De första polynomen

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x, \ldots \tag{1.6}$$

och allmänt gäller

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n\left(e^{-x^2}\right), \quad ||H_n(\cdot)||^2_{L^2((-\infty,\infty),e^{-x^2})} = n!2^n\sqrt{\pi}.$$

Används bland annat i numerisk analys.

Chebyshev: $I = (-1, 1)$ och $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. De första polynomen

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = 2x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, \ldots \tag{1.7}$$

och allmänt gäller

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad ||T_n(\cdot)||^2_{L^2((-1,1),\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})} = \begin{cases} \pi, & n = 0, \\ \pi/2, & n > 0, \end{cases}.$$

2. Kapitel 5: L^2 theory

2.1. Upp. 5.22: Visa att formeln för allmänna Laguerre polynomet faktiskt definierar ett polynom av grad n.

Lösningsförslag. Formeln är en så kallad Rodrigues-formel och har utseendet

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} D^n \left(x^n e^{-x} \right).$$

Efter att har provat lite olika tekniker så kan följande argument extraheras. Om vi kan visa att för varje heltal m så gäller att

$$e^x D^m \left(\begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k \end{Bmatrix} (x) e^{-x} \right) = e^x D^{m-1} \left(\begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k \end{Bmatrix} (x) e^{-x} \right)$$

så är vi klara. Vi har direkt att

$$\begin{aligned} & e^x D^m \left(\begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k \end{Bmatrix} (x) e^{-x} \right) = \\ &= e^x D^{m-1} \left(\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k \end{Bmatrix} (x) e^{-x} - \begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k \end{Bmatrix} (x) e^{-x} \right) = \\ &= e^x D^{m-1} \left(\begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k-1 \end{Bmatrix} (x) e^{-x} - \begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k \end{Bmatrix} (x) e^{-x} \right) = \\ &= e^x D^{m-1} \left(\left(\begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k-1 \end{Bmatrix} (x) - \begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k \end{Bmatrix} (x) \right) e^{-x} \right) = \\ &= e^x D^{m-1} \left(\begin{Bmatrix} \text{något polynom} \\ \text{av grad } k \end{Bmatrix} (x) e^{-x} \right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Och resultatet följer. Egen lösning: **Varför?**

2.2. Upp. 5.29: Approximera $f(x) = |x|$ på intervallet $(-1, 1)$ med ett polynom av grad ≤ 3 med var och en av viktfunktionerna 1, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ samt $(1 - x^2)$.

Lösningsförslag. I fallet då $w(x) = 1$ och intervallet är $(-1, 1)$: vi minimerar i termer av normen för rummet $L^2((-1, 1), 1)$ där delrummet av alla polynom av grad ≤ 3 spänns upp av de ortogonala Legendre-polynomen, P_0, P_1, P_2 och P_3. Den bästa approximationen till f, som vi kallar $\tilde{f}_1$ blir således projektionen på dessa basvektorer (de är ortogonala!) så vi har alltså

$$\tilde{f}_1 = \langle f, P_0 \rangle \frac{P_0}{||P_0||^2} + \langle f, P_1 \rangle \frac{P_1}{||P_1||^2} + \langle f, P_2 \rangle \frac{P_2}{||P_2||^2} + \langle f, P_3 \rangle \frac{P_3}{||P_3||^2}. \tag{2.2}$$

Vi reducerar lite: $f(x) = |x|$ är en jämn funktion eftersom $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ samt så har vi att P_0, P_2 är jämna funktioner och P_1 och P_3 är udda (se tabellen ovan). Detta gör att fP_0 och fP_2 är jämna medan fP_1 och fP_3 är udda, eftersom vi integrerar mellan -1 och 1 i de inre produkterna så får vi direkt

$$\tilde{f}_1 = \langle f, P_0 \rangle \frac{P_0}{||P_0||^2} + \langle f, P_2 \rangle \frac{P_2}{||P_2||^2}. \tag{2.3}$$

Vi får sedan

$$\langle f, P_0 \rangle = \int_{-1}^{1} |x| \, dx = 2 \int_0^1 x dx = 1,$$

samt

$$\langle f, P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} |x| \frac{1}{2}(3x^2 - 1)dx = 2\int_0^1 x\frac{1}{2}(3x^2-1)dx = \\ = \int_0^1 (3x^3 - x)dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \tag{2.4}$$

Alltså blir

$$\tilde{f}_1 = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2}(3x^2-1)}{\frac{2}{5}} = \\ \frac{1}{2} + \frac{5}{16}(3x^2 - 1) = \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}. \tag{2.5}$$

I fallet $I = (-1, 1)$ och med viktfaktorn $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ så vet vi att Chebyshev polynomen T_n utgör en ortogonal bas. Även här har vi att T_0 och T_2 är jämna funktioner och T_1 och T_3 är udda. På samma sätt som ovan får vi för denna approximation $\tilde{f}_2$ av f att

$$\tilde{f}_2 = \langle f, T_0 \rangle \frac{T_0}{||T_0||^2} + \langle f, T_2 \rangle \frac{T_2}{||T_2||^2}. \tag{2.6}$$

Vi har att

$$\langle f, T_0 \rangle = \int_{-1}^{1} |x| \, 1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\ = 2\left[-(1-x^2)^{1/2}\right]_0^1 = 2, \tag{2.7}$$

samt

$$\langle f, T_2 \rangle = \int_{-1}^{1} |x| \, (2x^2-1) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_0^1 (2x^2-1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\ = 2\left[-(2x^2-1)(1-x^2)^{1/2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 4x(1-x^2)^{1/2}dx = \\ = -2 + 8\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \tag{2.8}$$

vilket ger oss

$$\tilde{f}_2(x) = \langle f, T_0 \rangle \frac{T_0}{||T_0||^2} + \langle f, T_2 \rangle \frac{T_2}{||T_2||^2} = 2 \cdot \frac{1}{\pi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2x^2-1}{\frac{\pi}{2}} = \\ \frac{2}{\pi} + \frac{8}{3\pi}x^2 - \frac{4}{3\pi} = \frac{8}{3\pi}x^2 + \frac{2}{3\pi} = \frac{2}{3\pi}(4x^2+1) \tag{2.9}$$

Sista fallet leder efter räkningar fram till

$$\tilde{f}_3(x) = \frac{5}{32} + \frac{35}{32}x^2.$$

3. Kapitel 6: Separation of Variables

3.1. **Upp. 6.4: En homogen partiell differentialekvation. Dirichlet data.**

Betrakta den partiella differentialekvationen

$$u_{xx} = tu_t \text{ för } 0 < x < \pi, t > 1, \tag{3.1}$$

där vi har randdata

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, t > 1 \tag{3.2}$$

samt ”begynnelsevärde”

$$u(x, 1) = \sin(x) + 2\sin(3x), 0 < x < \pi. \tag{3.3}$$

Vi ska försöka lösa denna.

Lösningsförslag. Vi ansätter en lösning på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ och ser vad vi kan få ut av denna ansats. Insatt i PDE'n ger detta

$$X''(x)T(t) = tX(x)T'(t) \implies \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{tT'(t)}{T(t)} = \lambda, \tag{3.4}$$

för någon konstant λ. Vi får följande system av ordinära differentialekvationer, av andra ordningen,

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \\ T''(t) - \lambda \frac{1}{t} T(t) &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Vilken av dessa ska vi attackera? Randdata $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ ger att $T(t) = 0$ för alla t eller att $X(0) = 0$. Att $T(t) = 0$ för alla t ger ingenting intressant eftersom då blir $u(x,t) = 0$ men detta uppfyller inte begynnelsevärdet. Alltså $X(0) = 0$. På samma sätt $X(\pi) = 0$.

- Om $\lambda = 0$ så får vi att $X'' = 0$, alltså $X(x) = ax + b$ men randvärdena ger då att $a = b = 0$, alltså $X(x) = 0$ och vi får inget intressant.
- Om $\lambda = \kappa^2 > 0$ så får vi att $X(x) = C_1 e^{\kappa x} + C_2 e^{-\kappa x}$. Men $X(0) = 0$ ger att $C_1 + C_2 = 0$ och $X(\pi) = 0$ ger att $C_1 e^{\kappa\pi} + C_2 e^{-\kappa\pi} = 0$. Detta är ekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\kappa\pi} & e^{-\kappa\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 0,$$

  vilket ger att $u(x,t) = 0$, ej intressant.
- Sista fallet $\lambda = -\kappa^2 < 0$. Då blir $X(x) = C_1 \cos(\kappa x) + C_2 \sin(\kappa x)$. Att $X(0) = 0$ ger direkt att $C_1 = 0$, så $X(x) = C_2 \sin(\kappa x)$. Sista randvärdet. $X(\pi) = 0$ ger oss

$$C_2 \sin(\kappa\pi) = 0.$$

  Måste detta betyda att $C_2 = 0$ och att vår ansats inte var lyckad? Nej, om vi väljer κ väl så är ekvationen ovan uppfylld. Vi tar

$$\kappa\pi = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \kappa = n \in Z.$$

Detta get $\lambda_n = -n^2$ där $n \in \mathbb{Z}$. Alltså för dessa värden för konstanten λ så får vi lösningar till vår ansats som inte behöver vara identiskt lika med noll. Vad händer med T? Vi får att

$$T'(t) + n^2 \frac{1}{t} T(t) = 0 \implies T(t) = B_n t^{-n^2},$$

där B_n är en konstant (formeln funkar även för fallet $n = 0$). Dessa räkningar föreslår att funktionerna, för $n \in Z$,

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sin(nx)t^{-n^2}$$

uppfyller den givna partiella differentialekvationen (kolla detta) samt randdata (ser du det?!), alltså 2 av 3 krav uppfyllda. Vi ser att för n och $-n$ så får vi en funktion av liknande slag samt för $n = 0$ så får vi $u_0(x,t) = 0$. Så vi kan inskränka oss till att betrakta $u_n(x,t)$ för $n > 0$.

Vad har vi nu? En samling funktioner som uppfyller differentialekvationen samt randdata. Nu till begynnelsevillkoret. Vi ser att ingen funktion självt uppfyller $u(x,1) = \sin(x) + 2\sin(3x)$. Men om vi kombinerar lösningarna i en summa , vi tar

Varför kan vi ta en summa och vara säkra på att vi fortfarande uppfyller differentialekvationen samt randdata?

$$u(x,t) = u_1(x,t) + 2u_3(x,t) = \sin(x)t^{-1} + 2\sin(3x)t^{-9},$$

så får vi ju

$$u(x,1) = \sin(x) + 2\sin(3x) \text{ för alla } x \in (0,\pi).$$

Alltså har vi fått fram lösningen!

3.2. **Upp. 6.5: En inhomogen partiell differentialekvation. Dirichlet data.**

Betrakta den partiella differentialekvationen

$$u_{xx} = u_t + \sin(x) \text{ för } 0 < x < \pi, t > 0, \tag{3.6}$$

där vi har randdata

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, t > 0 \tag{3.7}$$

samt ”begynnelsevärde”

$$u(x,0) = \sin(x) + \sin(2x), 0 < x < \pi. \tag{3.8}$$

Lösningsförslag. Inspirerarde av den tidigare lösningen så är vi ännu lite modigare och ansätter följande

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(nx).$$

Vi har direkt att en sådan lösning (om den konvergerar) skulle uppfylla randdata. För att den ska uppfylla differentialekvationen så deriverar vi termvis och får

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 c_n(t)\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t)\sin(nx) + \sin(x) \Leftrightarrow \\ (-c_1(t) - c_1'(t) - 1)\sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty}(-n^2 c_n(t) - c_n'(t))\sin(nx) = 0.\end{gathered} \tag{3.9}$$

och om alla koefficienter är 0 så har vi en lösning. Alltså

$$\begin{gathered}c_1'(t) + c_1(t) = -1 \implies c_1(t) = A_1 e^{-t} - 1 \\ c_n'(t) + n^2 c_n(t) = 0 \implies c_n(t) = A_n e^{-n^2 t}, n \geq 2.\end{gathered} \tag{3.10}$$

som ger oss

$$u(x,t) = \big(A_1 e^{-t} - 1\big)\sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\sin(nx).$$

För att uppfylla begynnelsevärdet får vi

$$u(x,0) = (A_1 - 1)\sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin(nx) = \sin(x) + \sin(2x).$$

Så sätter vi $A_1 = 2$ och $A_2 = 1$ och övriga koefficienter till noll så är även detta villkor uppfyllt.

$$u(x,t) = \big(2e^{-t} - 1\big)\sin(x) + e^{-4t}\sin(2x).$$

Ovan gjorde vi en del antaganden,t.ex. att man kunde derivera ansatsen termvis. Huruvida detta är ok kan vi egentligen släppa nu, eftersom vi har en potentiell lösning $u(x,t) = \big(2e^{-t} - 1\big)\sin(x) + e^{-4t}\sin(2x)$. Om vi deriverar denna och testar i differentialekvationen så ser vi att den är uppfylld,

$$\begin{gathered}u_{xx}(x,t) = -\big(2e^{-t} - 1\big)\sin(x) - 4e^{-4t}\sin(2x), \\ u_t(x,t) = -2e^{-t}\sin(x) - 4e^{-4t}\sin(2x)\end{gathered} \tag{3.11}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}&u_{xx}(x,t) - u_t(x,t) = \\ &= -\big(2e^{-t} - 1\big)\sin(x) - 4e^{-4t}\sin(2x) + 2e^{-t}\sin(x) + 4e^{-4t}\sin(2x) = \sin(x)\end{aligned} \tag{3.12}$$

som är ok! Vi har också att $u(x,0) = \sin(x) + \sin(2x)$ samt att $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ för alla t. Vi har alltså hittat en lösning till problemet!

Institutionen för matematik, KTH, SE-100 44, Stockholm, Sweden
E-mail address: karljo@kth.se