1 Föreläsning 8

Vi antar att $\overline{A}$ är ett kontinuerligt vektorfält. En fältlinje till $\overline{A}$ är en kurva $\overline{r} = \overline{r}(t)$ sådan att tangentvektorn $\frac{d\overline{r}}{dt}$ är parallell med $\overline{A}$ i varje punkt $\overline{r}(t)$, d.v.s.

$$\frac{d\overline{r}}{dt}(t) = \lambda \overline{A}(\overline{r}(t)) \, ,$$

där $\lambda \neq 0$ är en skalär som kan bero kontinuerligt på t.

Vi presenterar några egenskaper hos fältlinjer:

a). Punkten $\overline{r}_0$ är en kritisk punkt för $\overline{A}$, om $\overline{A}(\overline{r}_0) = 0$. Man kan visa att det inte finns fältlinjer som startar från, slutar i eller passerar en kritisk punkt. Detta kan tolka så här: om en partikel befinner sig i punkten $\overline{r}_0$ så är den kvar där hela tiden. Partikeln kan inte lämna den kritiska punkten och kan heller inte komma till den kritiska punkten. Matematisk måste följande ekvation lösas

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \lambda \overline{A}(\overline{r}(t)), \quad \overline{r}(t_0) = \overline{r}_0 \, .$$

Direkt beräkning visar att funktionen $\overline{r}(t) = \overline{r}_0$ (för alla t) är en lösning och det finns inga andra lösningar.

b). Genom varje icke-kritisk punkt passerar exakt en fältlinje till $\overline{A}$ (Picards sats). Fältlinjer innehåller inte kritiska punkter.

c). Parallella vektorfält har samma fältlinjer.

d). Fältlinjer beror inte på λ. Faktorn λ påverkar bara parametriseringen av fältlinjer. För att visa detta betraktar vi ekvationen för fältlinjer där $\lambda = 1$

$$\frac{d\overline{r}}{dt}(t) = \overline{A}(\overline{r}(t)) \tag{1}$$

och gör ett variabelbyte

$$\tau = \int_0^t \frac{1}{\lambda(s)} ds \, .$$

Eftersom λ är en kontinuerlig funktion som är skiljd från 0 i varje punkt är funktionen $t \to \tau$ strikt växande eller strikt avtagande (beroende på tecken av λ, vilket inte kan ändras). Vi skriver om (1) i variabeln τ

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\overline{r}}{d\tau} = \overline{A}(\overline{r})$$

eller

$$\frac{d\overline{r}}{d\tau} = \lambda \overline{A}(\overline{r}) \, .$$

Så att anta att $\lambda = 1$ är ingen inskränkning. Men ofta kan ett lämpligt val av λ (eller variabeln t) betydligt förenkla sökandet efter fältlinjer.

Ex. 1 Hitta alla fältlinjer till vektorfältet $\overline{A} = -y\hat{x} + x\hat{y}$.

Lösn. Vektorfältet har kritiska punkter $(x, y, z) = (0, 0, z)$, d.v.s. längs hela z–axeln.

För att hitta övriga fältlinjer ska vi använda cylindriska koordinater. Vektorfältet $\overline{A}$ i cylindriska koordinater är lika med $\rho\hat{\varphi}$ och tangentvektorn är

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} + \frac{dz}{dt}\hat{z}\,.$$

Fältlinjerna uppfyller

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \frac{d\varphi}{dt} = \lambda\,, \quad \frac{dz}{dt} = 0\,.$$

Vi tar $\lambda = 1$. Då har vi att

$$\rho = \rho_0 \quad \varphi = t + c \quad z = z_0\,.$$

Det magnetiska fältet för en elektrisk ledare längs z–axeln d.v.s. $\frac{1}{\rho}\hat{\varphi}$ är definierad i $\mathbb{R}^3 \setminus z$–axeln och parallell i varje punkt med $\rho\hat{\varphi}$. Alltså har fältet samma fältlinjer som $\rho\hat{\varphi}$.

Ex. 2 Hitta alla fältlinjer till vektorfältet (gravitationsfältet) $\overline{A} = -\frac{\overline{r}}{r^2}$.

Lösn. Observera att definitionsmängden för fältet är $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$.

Vektorfältet har inga kritiska punkter. Vi ska söka fältlinjer i sfäriska koordinater. Eftersom

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi}$$

har vi

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\lambda}{r^2}\,, \quad r\frac{d\theta}{dt} = 0\,, \quad r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt} = 0\,.$$

Vi tar $\lambda = r^2$ och får

$$r = -t\,, \quad \theta = \theta_0\,, \quad \varphi = \varphi_0\,.$$

Parametern t ligger i intervallet $(-\infty, 0)$.

1.1 Potentialfältet

Här antar vi att vektorfältet $\overline{A}$ har en potential,

$$\overline{A} = \nabla\Phi\,.$$

Då kan vi säga mer om fältlinjerna:

a). *Potentialfält har aldrig slutna fältlinjer.* Låt $\overline{r}(t)$, $t \in [a, b]$, vara en sluten fältlinje, d.v.s. $\overline{r}(a) = \overline{r}(b)$ och

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \lambda(t)\nabla\Phi(\overline{r}(t)) \quad \lambda(t) \neq 0\,.$$

Betrakta funktionen $f(t) = \Phi(\overline{r}(t))$. Vi har

$$\frac{df}{dt}(t) = \nabla\Phi \cdot \frac{d\overline{r}}{dt} = \lambda(t)|\nabla\Phi|^2 .$$

Detta medför att

$$\frac{df}{dt}(t) > 0 \quad \text{eller} \quad \frac{df}{dt}(t) < 0 \quad \text{för alla } t \in [a, b].$$

Alltså, $f(a)$ kan inte vara lika med $f(b)$.

b). Fältlinjer av ett potentialfält är ortogonala mot nivåytor $\Phi = c$. Detta följer från ekvationen för fältlinjer

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \lambda\nabla\Phi$$

och från det faktum att $\nabla\Phi$ är ortogonal mot nivåytor.

Ex. 3 Betrakta återigen vektorfältet $\overline{A} = -\frac{\overline{r}}{r^2}$ från Ex. 2. $\overline{A}$ är ett potentialfält och $\overline{A} = \nabla(1/r)$. Nivåytor till $\Phi = 1/r$ är cirklar. Eftersom fältlinjerna är ortogonala mot nivåytor är fältlinjerna $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$, $r = r$ (r–kurvor).

1.2 Fler exempel

Ex. 4 Hitta alla fältlinjer till dipolfältet

$$\overline{A} = \nabla\Big(\frac{-\cos\theta}{r^2}\Big) = \frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{r^2}\hat{\theta} .$$

Lösn. Definitionsmängden är $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$ och det finns inga kritiska punkter. Alltså har vi i sfäriska koordinater att

$$\frac{dr}{dt} = \lambda\frac{2\cos\theta}{r^3} , \quad r\frac{d\theta}{dt} = \lambda\frac{\sin\theta}{r^3} , \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0 . \tag{2}$$

Vi väljer $\lambda = r^4/\sin\theta$. Observera att fallet $\theta = 0$ och $\theta = \pi$ måste betraktas separat. För dessa fall vi får två fältlinjer $\theta = 0$, $r = t$, $t > 0$ och $\theta = \pi$, $r = t$, $t > 0$. Sedan fås (2) till

$$\varphi = \varphi_0 , \quad t = \theta$$

och

$$\frac{dr}{d\theta} = r\frac{2\cos\theta}{\sin\theta} .$$

Sista ekvationen kan skrivas om som

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} .$$

Detta är en separabel differentialekvation (se Analys A) och vi har

$$\log r = \log\sin^2\theta + c$$

eller

$$r = c \sin^2 \theta \,.$$

Det är klart att konstanten c måste vara positiv.

Svar. Fältlinjer är

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{och} \quad r = c \sin^2 \theta \,, \quad \theta \in (0, \pi) \,,$$

där c är en godtycklig positiv konstant och det finns två fältlinjer till $\theta = 0$ och $\theta = \pi$. Kontrollera att genom varje punkt ($\neq 0$) passerar en fältlinje!

Ex. 5 (Tentamen augusti 2000, 6) Hitta fältlinjen till vektorfältet

$$\overline{A} = y\hat{x} - x\hat{y} + z\hat{z}$$

som passerar punkten $(x, y, z) = (1, 0, 1)$. Räkna ut linjeintegralen av vektorfältet $z\hat{\varphi}$ längs den del av fältlinjen som har startpunkt i $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ och slutpunkt i planet $z = 1/2$.

Lösn. I cylindriska koordinater är $\overline{A} = -\rho\hat{\varphi} + z\hat{z}$ och ekvationerna för fältlinjerna

$$\dot{\rho} = 0 \,, \quad \dot{\varphi} = -\lambda\rho \quad \text{och} \quad \dot{z} = \lambda\, z \,.$$

Vi tar $\lambda = -1/\rho$ och väljer φ som parameter. Då kan fältlinjen skrivas som

$$\rho = 1 \,, \quad \varphi = \varphi \quad \text{och} \quad z = e^{-\varphi} \,, \quad -\infty < \varphi < \infty \,.$$

I cylindriska koordinater är startpunkten $(1, 0, 1)$ och slutpunkten är $(1, \ln 2, 1/2)$. Linjeintegralen blir

$$\int_0^{\ln 2} e^{-\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \,.$$

Ex. 6 (*En fysikalisk tolkning av rotationen*) Betrakta vektorfältet $\overline{A} = \overline{a} \times \overline{r}$, där $\overline{a}$ är en vektor ($\neq 0$) i $\mathbb{R}^3$. Observera samt kontrollera att

$$\nabla \times \overline{A} = 2\overline{a} \,.$$

Låt oss hitta alla fältlinjer till vektorfältet $\overline{A}$. Först väljer vi kartesiska koordinater med $\hat{z}$ som har samma riktningen som $\overline{a}$. Då är $\overline{a} = a\hat{z}$, där $a = |\overline{a}|$, och

$$\overline{A} = a\hat{z} \times \overline{r} = a(-y\hat{x} + x\hat{y}).$$

Kritiska punkter för vektorfältet $\overline{A}$ är hela z–axeln. Låt oss hitta fältlinjerna. Vi har i cylindriska koordinater $\overline{A} = a\rho\hat{\varphi}$. Så ekvationerna för fältlinjerna är

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \,, \quad \rho\frac{d\varphi}{dt} = \lambda a\rho \,, \quad \frac{dz}{dt} = 0 \,.$$

Vi väljer $\lambda = 1/a$ och $\varphi = t$. Då har vi att fältlinjerna är

$$\rho = \rho_0 \,, \quad \varphi = \varphi \,, \quad z = z_0 \,,$$

där $\rho_0 > 0$ och z_0 är två godtyckliga konstanter. Alltså ser vi att vektorfältet med rotationen $2\overline{a}$ förflyttar en partikel längs cirklar med centrum på axeln med riktningen $\overline{a}$.