Intromatte

Introduktion till högre matematik för teknologer

Jonas Sjöstrand

KTH-SCI
2015

Högre matematik är roligare!

Tekniska högskolestudier innehåller mycket matematik och många teknologer upplever ett hopp i svårighetsgrad från gymnasiet till högskolan. Meningen med det här kompendiet är dels att lindra den känslan, dels att inspirera till matematisk nyfikenhet.

Det är inte en ren repetition av gymnasiets mattekurser utan innehåller framför allt sådant som inte brukar gås igenom ordentligt på vare sig gymnasiet eller högskolan — sådant som riskerar att falla mellan stolarna. För att kunna njuta så mycket som möjligt av kompendiet bör man därför ha bra koll på gymnasiematten. Ett bra repetitionsmaterial är övningshäftet *Förberedande kurs i matematik 1* med tillhörande lösningshäfte. Båda finns att ladda ner gratis på math.se.

Innehåll

1 Matematikspråket

1.1 Symboler

Vi ska öva på att skriva, läsa och tala matematiskt. Så här kan det se ut i en mattebok:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \leq 8 \Rightarrow R < \sqrt[3]{2}$$

Och så här utläses det:

Fyra tredjedels pi R-tre mindre än eller lika med åtta medför att R är mindre än kubikroten ur två. $\Rightarrow$

Det här är ett matematiskt påstående uttryckt dels med symboler, dels med svenska ord. Att det är ett påstående ser man på symbolen $\Rightarrow$. Pilen påstår att om vänsterledet är sant så är också högerledet sant. Den läses *medför att* eller *implicerar*.

I vänsterledet finns först ett uttryck med siffror, bokstäver, gånger och delat med. Bokstaven π betyder alltid talet 3,1415926535... och bokstaven R betyder också ett tal. Hela uttrycket ställdes upp för 2200 år sedan av Arkimedes, kanske den störste matematikern genom tiderna, och anger volymen för ett klot med radien R. Med R^3 menas då $R \cdot R \cdot R$. Vänsterledet påstår att klotets volym är högst lika med 8 volymsenheter. π

Högerledet påstår att radien R är mindre än 1,2599.... Det talet kallas kubikroten ur två eftersom $1{,}2599\ldots \cdot 1{,}2599\ldots \cdot 1{,}2599\ldots = 2$.

Om klotets volym är högst 8 så är dess radie mindre än 1,2599... — det är hela påståendet och det är faktiskt sant.

Här är Arkimedes (till vänster) och hans läromästare Euklides (till höger). Skägg och mössa var högsta mode i Alexandria.

Det är viktigt att kunna översätta mellan symboler och svenska, så här följer några exempel att öva på.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1}$$

a plus b, i kvadrat, är lika med a-två plus två a b plus b-två.

$$\alpha^2 < 17 \Leftrightarrow -\sqrt{17} < \alpha < \sqrt{17}$$

$\Leftrightarrow$ *Alfa-två är mindre än sjutton om och endast om alfa ligger mellan minus roten ur sjutton och plus roten ur sjutton.*

Dubbelpilen läses *om och endast om*. Dubbla olikheter uttrycks enklast med *mellan*. Grekiska alfabetet används av alla jordens matematiker, så det måste du lära dig nu. Men först några symboler till.

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$$

$n!$ *Ett-fakultet är ett, två-fakultet är två, tre-fakultet är sex, n-fakultet är n gånger n minus ett gånger n minus två och så vidare ner till ett*

Man ska veta att $n!$ (eng. *n factorial*) betyder antalet permutationer av n saker. Till exempel är $3! = 3 \cdot \cdot 2 \cdot 1 = 6$ och det finns mycket riktigt 6 sätt att ordna tre saker: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. På hur många sätt kan man ordna om tio saker? Svar: $10! = 3\,628\,800$.

Uttrycket $n!$ växer tydligen väldigt snabbt. Precis hur snabbt det växer framgår av den berömda *Stirlings formel*, som vi ska se på nu.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{2}$$

$\approx$ *n-fakultet är ungefär lika med roten ur två pi n gånger n genom e upphöjt till n*

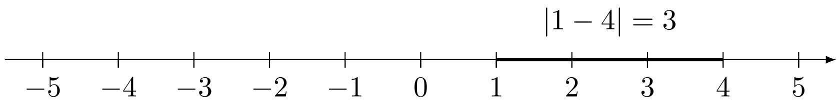
Exakt vad *ungefär lika med* betyder får man skriva ut i texten. För 10! ger Stirlings formel närmevärdet $3\,598\,696$ som har ett fel på mindre än en procent och ju större n är, desto mindre procentuellt fel blir det.

e Bokstaven e betyder nästan alltid talet 2,718281828459045 ... som jämte π är matematikens viktigaste konstant. Visst är det konstigt att dessa decimaltal behövs i en formel för $n!$, som ju är ett heltal! (Stirlings formel behöver du inte lära dig än.)

$$|-\pi| = \pi, \ |2-3| = 1, \ |17-17| = 0$$

Absolutbeloppet av minus pi är pi, avståndet mellan två och tre är ett, avståndet mellan sjutton och sjutton är noll $|x|$

Absolutbeloppet betyder att man tar bort eventuellt minustecken. Absolutbeloppet för ett tal minus ett annat tal blir då avståndet mellan talen på tallinjen, oavsett vilken ordning de skrivs i.



I matematiken, liksom alltid, betyder tre prickar $\cdots$ att läsaren själv får fylla i det som fattas.

$$1+3+5+\cdots+19 = 100, \quad 1+3+5+\cdots+n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \tag{3}$$

Ett plus tre plus fem osv upp till nitton är lika med 100. Ett plus tre plus fem osv upp till n är lika med n plus ett halva höjt till två. $\cdots$

När prick prick prick inte blir tillräckligt entydigt använder man summasymbolen, som är grekiska alfabetets stora sigma. $\sum_{i=1}^{k}$

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2 \tag{4}$$

Summan av alla tal av formen två i minus 1 då i går från ett till k är lika med k-kvadrat.

När många faktorer ska multipliceras kan man på samma sätt använda produktsymbolen, som är stora pi.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i \tag{5}$$

n-fakultet är produkten av alla tal i från 1 till n $\prod_{i=1}^{n}$

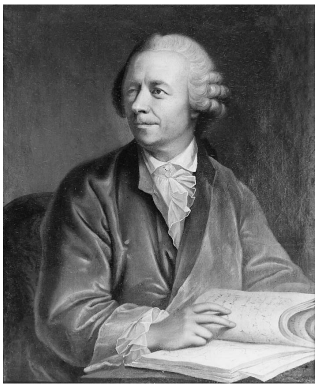
En jätteberömd formel där produkten inte går över alla tal utan bara över alla primtal är *Eulers produktformel*, Den bevisades 1737 av Leonard Euler, alla tiders mest produktiva matematiker. Han fick förresten tretton barn.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \prod_{\text{primtal } p} \frac{1}{1-1/p^2} \tag{6}$$

∞ *Summan av ett genom n-kvadrat för alla n från ett till oändligheten är lika med produkten av alla ett genom ett minus ett genom p-kvadrat för alla primtal p*

Här ser vi en välkänd symbol, ∞, som visar att summan har oändligt många termer. Hur är det med produkten? Finns det oändligt många primtal, tro? Frågan besvarades redan för 2300 år sedan av *Euklides* och du kommer senare i kursen att upprepa hans bedrift!

Här är Euler och det grekiska alfabetet:



α	alfa	ι	iota	ρ	rho
β	beta	κ	kappa	σ	sigma
γ	gamma	λ	lambda	τ	tau
δ	delta	μ	my	υ	ypsilon
ε	epsilon	ν	ny	φ	fi
ζ	zeta	ξ	xi	o	omikron
η	eta	o	omikron	ψ	psi
θ	theta	π	pi	ω	omega

Övningar

1.1: Berätta något om $\alpha\rho\chi\iota\mu\eta\delta\eta\sigma$.

1.2: Läs först högt och försök sedan fatta vad du just har påstått.

$$\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ för något heltal } n$$

1.3: Läs högt, förstå påståendet, välj ett par tal ρ och σ och kolla om påståendet stämmer. Försök sedan hitta ett par tal så att påståendet inte stämmer.

$$\rho^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma \geq 2\rho + 2\sigma$$

1.4: Läs högt, förstå, testa med $x = -10$ och motivera sedan påståendet.

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

1.5: Läs högt, förstå, testa med $n = 3$ och motivera påståendet. Vad säger det för $n = 0$?

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

1.6: Om $n = 0$ får produkten i (5) inga faktorer alls: $\prod_{i=1}^{0} i$. Hur ska en sådan produkt tolkas, med tanke på föregående uppgift?

1.7: I (3) och (4) skrivs en ekvation på tre olika sätt. Vad ska k och n vara för att de ska betyda samma sak? Stämmer likheten för nittonfallet?

1.8: Summan och produkten i Eulers formel har samma värde, nämligen $\pi^2/6$. Hur mycket är det, ungefär? Om man bara tar med tre termer i summan får man förstås ett mindre värde. Kolla det! Om man bara tar med två faktorer i produkten får man också ett för litet värde. Kolla det också!

1.9: Som vi skrivit Eulers formel finns en tvåa med i båda leden. Euler visade att formeln förblir sann om tvåorna byts mot ett godtyckligt tal större än 1. Försök att skriva ner denna allmänna Eulers formel!

1.10: (Värsting) Vi såg att 10! är ett sjusiffrigt tal. Uppskatta med Stirlings formel hur många siffror talet 27! har.

1.2 Olikheter

Likheter och olikheter är påståenden som kan vara sanna eller falska. Vilket av följande påståenden är sant?

$$2 \cdot 1 \cdot 0 < 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0$$

$$17x \leq 18x \text{ för alla } x$$

$$|\lambda| \cdot |\mu| = |\lambda\mu| \text{ för alla } \lambda \text{ och } \mu$$

$$\pi = 3{,}14$$

Det första påståendet är falskt eftersom båda leden är noll. Det andra påståendet är sant för positiva x men falskt för $x = -1$. Det sista påståendet är falskt eftersom π bara är ungefär lika med 3,14. Men det tredje påståendet är sant. Absolutbeloppen plockar bort alla minustecken och om det sker före eller efter multiplikationen spelar ingen roll.

Hur uttrycker man att x ligger högst en enhet från talet 17 på tallinjen? Antingen skriver man $16 \leq x \leq 18$ eller $|x - 17| \leq 1$.

Om en liter kvicksilver är tyngre än en liter vatten, så är naturligtvis två liter kvicksilver tyngre än två liter vatten. I formelspråk blir det så här.

$$x > y \Rightarrow 2x > 2y \;\text{ och allmännare } x > y \Rightarrow ax > ay \text{ för alla positiva } a$$

Men om a är negativt då? Vi har att $13 > 1$ men $-26 < -2$. Allmänt gäller att **vid multiplikation med negativt tal byter olikheten riktning**. Det är en fälla när man räknar med olikheter och en liknande gäller absolutbelopp.

Exempel

Medför $x < y$ att $|x| < |y|$ eller är det tvärtom?

Om talen är positiva är saken klar. Om x är ett stort negativt tal kan första olikheten vara sann men andra falsk. Och om y är ett stort negativt tal kan andra olikheten vara sann men första falsk, så ingen implikationspil gäller.

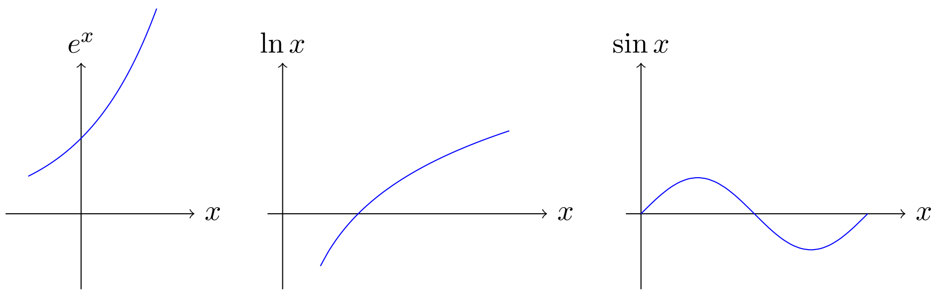
Exempel

För vilka x gäller det att $5x + 2 \geq 2x + 5$?

Vi samlar alla x-termer på ena sidan och konstanttermer på andra sidan. $5x - 2x \geq 5 - 2$, alltså $3x \geq 3$. Här kan vi multiplicera med en tredjedel och får svaret $x \geq 1$.

Det gick ju bra, men om vi samlat x-termerna på högra sidan i stället hade vi fått $-3 \geq -3x$. Här kan vi multiplicera med $-1/3$ och får ett ensamt x i högerledet. Men eftersom vi multiplicerat med ett negativt tal byter olikheten riktning och vi får $1 \leq x$.

Om $a = b$ så är naturligtvis $e^a = e^b$ och $\ln a = \ln b$ och $\sin a = \sin b$. Men om $a < b$, är då $e^a < e^b$ och $\ln a < \ln b$ och $\sin a < \sin b$? För att svara på det måste man kolla funktionskurvorna. Exponentialkurvan och logaritmkurvan är växande, dvs har uppförsbacke åt höger. Därmed är det lätt att inse att $e^a < e^b$ och $\ln a < \ln b$. Men sinuskurvan är omväxlande backe upp och backe ner, så där gäller inte alltid $\sin a < \sin b$.



Två triangelsidor är tillsammans längre än den tredje sidan. Den olikheten gäller trianglar i planet men vi kan tänka oss en triangel på tallinjen också. Om de tre hörnen är $0, x, y$ blir sidlängderna $|x|, |y|, |x - y|$ och olikheten säger triangelolikheten

$$|x| + |y| \geq |x - y| \quad \text{för alla } x \text{ och } y$$

Triangelolikheten är lika sann om man byter minus mot plus i högerledet, för om man byter tecken på y ändrar det inte vänsterledet.

En ännu mera användbar olikhet är att $x^2 \geq 0$. ”Kvadrater är positiva”, vill man kanske säga, men det är inte sant. ”Kvadrater är ickenegativa” får man säga i stället. positiv kvadrat

Exempel

Bevisa att $a^2 + 2ab + 3b^2 \geq 0$ för alla a och b.

En lösning bygger på kvadreringsregeln (1).

$$a^2 + 2ab + 3b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + b^2 = (a + b)^2 + b^2 + b^2$$

Nu står det summan av tre kvadrater och eftersom alla är ickenegativa blir summan ickenegativ.

Övningar

1.11: Skriv en olikhet som gäller för alla x.

1.12: Skriv en olikhet som gäller för alla x utom för $x = 0$.

1.13: Skriv en olikhet som gäller för alla x utom för $x = 1$.

1.14: För vilka x gäller $5x - 7 > 2x + 5$?

1.15: För vilka x gäller $5x^2 - 7 \geq 2x^2 + 5$?

1.16: Du vet att $a < b$ och du är helt säker på att $1 < 2$. Multiplikation ledvis ger då $1 \cdot a < 2 \cdot b$. Men så får man visst inte göra! Försök att hitta två tal så att $a < b$ är sant men $a < 2b$ är falskt.

1.17: Enligt texten är det lätt att inse att $e^a < e^b$ om $a < b$. När man ser den frasen i en mattebok ska man ana oråd! Ofta betyder det att matematikern inte kommit på något enkelt argument för saken. Bäst att du gör det själv nu. Du kan använda att exponentialfunktionen är växande.

1.18: Det funkar åt andra hållet också. Om $e^a < e^b$ så gäller $a < b$. Motivera det påståendet! Vilken implikationspil ska stå mellan olikheterna? Om du kallar e^a för α och e^b för en annan lämplig grekisk bokstav så kan du uttrycka resultatet med logaritmer!

1.19: (Värsting) För vilka x gäller det att $x^2 - 3x + 2 < 0$?

1.3 Mängdlära

Så här ser ofta matematiska påståenden ut.

$$\sin n\pi = 0 \text{ för alla heltal } n$$

$$e^x > 0 \;\; \text{för alla reella tal } x$$

Med beteckningarna $\mathbb{Z}$ för mängden av heltal och $\mathbb{R}$ för mängden av reella tal blir det kortare: $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \in$

$$\sin n\pi = 0 \text{ för alla } n \in \mathbb{Z}$$

$$e^x > 0 \;\; \text{för alla } x \in \mathbb{R}$$

Ännu kortare blir det med symbolen $\forall$ (för alla): $\forall, \exists$

$$\sin n\pi = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Sinus n pi är lika med 0 för alla heltal n.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$$

För alla reella tal x är e höjt till x positivt.

$\forall$-delen kan stå först eller sist, vilket man tycker är tydligast.

Tillsammans med $\forall x$ (för alla x) ser man ofta $\exists y$ (existerar ett y) i påståenden av följande typ.

$$\forall x > 0 \;\; \exists y \quad y^2 = x$$

För alla positiva tal x finns ett y vars kvadrat är lika med x.

Andra mängder kan definieras med mängdklamrar, så här.[1] $\mathbb{N}, \{\ldots \mid \ldots\}$

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}, \quad \text{naturliga talen} \tag{7}$$

$\varnothing$

$$\varnothing = \{\}, \quad \text{tomma mängden} \tag{8}$$

Intervall på reella axeln kan vara öppna eller slutna i ändarna.

$$[0, 17] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 17\} \tag{9}$$

[1] I stället för vertikalstreck kan man ha kolon.

$[a, b]$ *Slutna intervallet av reella tal mellan 0 och 17, gränser inräknade.*

$$(7, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x < \infty\} \tag{10}$$

(a, b) *Öppna intervallet av reella tal större än sju.*

Ibland används omvända klammerparenteser för öppna intervall: $]7, \infty[$.

För ändliga mängder kan man räkna upp elementen.

$$A = \{1, \pi, 17\}, \qquad \varnothing = \{\}, \quad \text{tomma mängden} \tag{11}$$

Mängdoperationerna är *union*, *snitt* (eng. intersection) och *differens.*

$A \cup B$

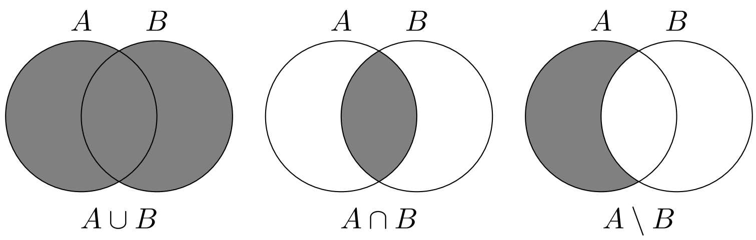
$A \cap B$

$A \setminus B$

$$[0, 17] \cup (7, \infty) = [0, \infty)$$
$$[0, 17] \cap (7, \infty) = (7, 17]$$
$$[0, 17] \setminus (7, \infty) = [0, 7]$$

venndiagram

Med så kallade *venndiagram* kan man åskådliggöra mängdoperationerna:



Vad är intervallgränserna i $[0, 1, 2]$? Ett av kommatecknen måste vara decimalkommat, men ska det tolkas [0,1, 2] eller [0, 1,2]? Ett sätt att undvika missförstånd är att då använda decimalpunkt. Men man utläser ändå punkten komma, så 3.14 är ”tre komma fjorton”.

$A \subset B$

Naturliga tal är en delmängd av heltalen som i sin tur är en delmängd av de reella talen.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \tag{12}$$

Man kan infoga två talmängder till i kedjan. De *rationella talen* $\mathbb{Q}$ består av alla bråk, som $2/3$ och $-2014/17$. De *komplexa talen* $\mathbb{C}$ har en reell del och en imaginär del, som i $3 - 4i$ eller $\pi + 0{,}5i$. Den imaginära enheten i har egenskapen $i \cdot i = -1$ och mer än så behöver du inte veta i den här kursen. Vi kommer för det mesta att hålla oss till reella axeln $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{13}$$

$\mathbb{Q}, \mathbb{C}$

Hur betecknar man då *xy-planet*, det plan vi ritar kurvor på? Eftersom varje punkt (x, y) bestäms av två reella tal kan man uppfatta planet som mängden av reella talpar, och den kan man beteckna $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Första $\mathbb{R}$ är då x-axeln och andra $\mathbb{R}$ är y-axeln. Man kan också skriva $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Övningar

1.20: Vad påstås här? Är det sant?

$$\forall x \in [1, 17],\ |x - 9| \leq 8$$

1.21: Definiera med mängdklamrar T, mängden av tvåsiffriga naturliga tal.

1.22: Beskriv i ord följande mängd.

$$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$$

1.23: Skriv som ett intervall mängden

$$\{x \mid |x - 4{,}2| < 0{,}8\}$$

Kan missförstånd uppstå?

1.24: Tänk ut två mängder A och B så att $A \cup B = \mathbb{R}$ och $A \cap B = \mathbb{Z}$.

1.25: Använd mängdklamrar för att definiera J, mängden av jämna naturliga tal, och U, mängden av udda naturliga tal.

1.26: Skriv med symboler följande påstående. *Kvadraten på ett udda tal är udda.* Ledning: Använd föregående uppgift.

1.27: Skriv med symboler följande påstående. *Om kvadraten på ett naturligt tal n är jämn så är n jämnt.*

1.28: (Värsting) $\mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$ och sägs då vara *uppräknelig.* $\mathbb{Z} = \{\, 0, 1, -1, 2, -2, \ldots \}$ är också uppräknelig. Visa att $\mathbb{Q}$ också är uppräknelig!

1.4 Modellering

Matematik är en teoretisk vetenskap, men märkligt nog mycket användbar för att beskriva verkligheten. En sådan beskrivning kallas *matematisk modell.* Fysikerns mål är att ställa upp en modell för allt, matematikerns uppgift blir sedan att studera modellens egenskaper, upptäcka samband och lösa ekvationer.

Exempel

Vad väger luften i en fotboll?

1. Välj först beteckningar, en bokstav för varje storhet.
   d (m), fotbollens radie är 0,11
   V (m^3), fotbollens volym
   ρ ($\mathrm{kg/m}^3$), densitet för luft är 1,2
   m (kg), luftens massa

2. Skriv upp ekvationer som gäller, ofta allmänna lagar.

   $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (klotets volym enligt Arkimedes)

   $\rho = m/V$ (definitionen av densitet)

3. Lös ut den sökta bokstaven ur ekvationerna.

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{14}$$

4. Sätt in givna värden och gör beräkningen.

   $m = 1{,}2 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}11^3 = 0{,}0067$

   Luften i fotbollen väger alltså 6,7 gram.

Det resultat man får ger sanningen i modellen, inte nödvändigtvis i verkligheten. I verkligheten väger luften i en fotboll ungefär dubbelt så mycket som det värde vi fick fram. Luften i en fotboll skiljer sig nämligen i ett avseende från den luft spelarna andas. Kommer du på vad det gäller?

Det är viktigt att talvärden inte sätts in förrän i sista steget. Då har man en formel som stämmer för alla indata, i alla fall om man håller sig till SI-enheter.

Exempel

Vattenkokaren strejkar! Hur lång tid tar det att värma en liter tevatten med en tiowatts lampa?

1. Välj först beteckningar, en bokstav för varje storhet.
   V (m^3), vattnets volym är 0,001
   ρ ($\mathrm{kg/m}^3$), densitet för vatten är 1000
   c_p (J/kg·K), värmekapacitivitet för vatten är 4200
   T (K), temperaturhöjningen är 80 grader
   W (J), energimängd
   P (J/s), effekten är 10
   t (s), uppvärmningstiden

2. Skriv upp ekvationer som gäller.

   $W = T \cdot c_p \cdot \rho \cdot V$ (energibehov)
   $W = P \cdot t$ (energitillförsel)

3. Lös ut den sökta bokstaven ur ekvationerna.

   $$t = T \cdot c_p \cdot \rho \cdot V/P \tag{15}$$

4. Sätt in givna värden och gör beräkningen.

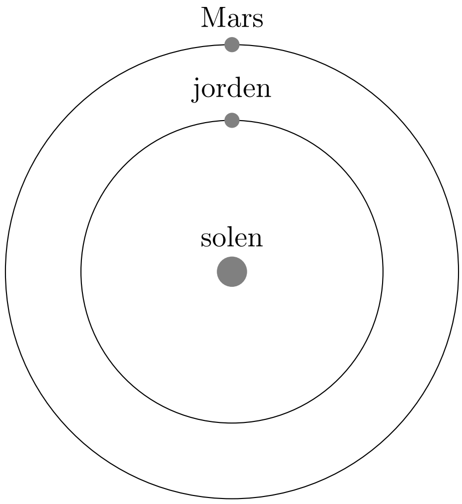
   $t = 80 \cdot 4200 \cdot 1000 \cdot 0{,}001/10 = 33600$

   Det tar 33600 sekunder, alltså nio timmar och tjugo minuter.

Samband i fysiken är oftast som (15), en variabel är *proportionell* mot några variabler och *omvänt proportionell* mot några, eller, som i (14), mot någon potens av en annan variabel. Ofta är det tillräcklig information för att man ska kunna dra intressanta slutsatser.

Exempel

Jorden eller Mars, vilken har högst hastighet runt solen?



1. Välj först beteckningar, en bokstav för varje storhet.
   r (m), planetens avstånd från solen
   v (m/s), planetens hastighet
   F (N), solens dragningskraft på planeten
   m (kg), planetens massa
   a (m/s^2), planetens acceleration

2. Skriv upp ekvationer som gäller, ofta allmänna lagar.

   $F = m \cdot a$ (rörelselag enligt Newton)

   $F = \text{konstant} \cdot m/r^2$ (gravitation enligt Newton)

   $a = v^2/r$ (cirkelrörelse enligt Newton)

3. Lös ut den sökta bokstaven ur ekvationerna.

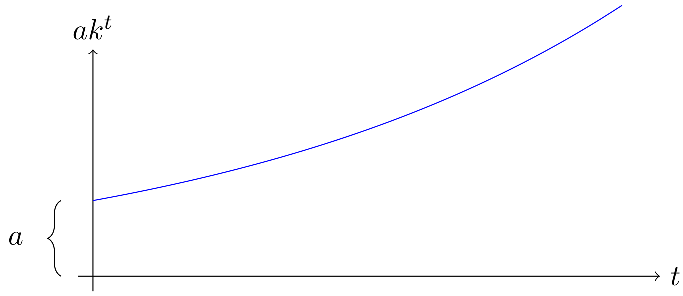
   $$v^2 = r \cdot a = r \cdot F/m = r \cdot \text{konstant}/r^2 = \text{konstant}/r \tag{16}$$
   $$v = \text{konstant}/\sqrt{r} \tag{17}$$

4. Sätt in givna värden och gör beräkningen.

   $r_M > r_J \;\Rightarrow\; v_M < v_J$

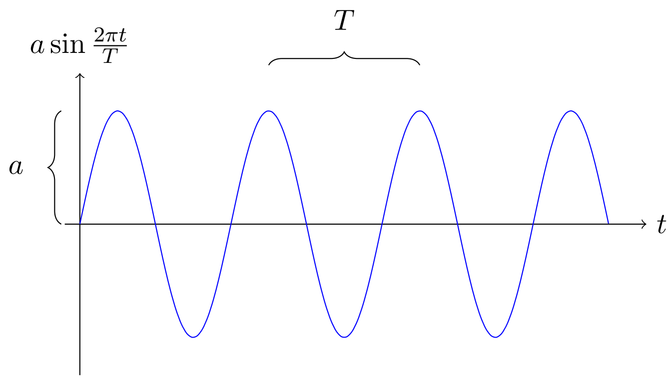
För fenomen som beror på tiden t är två modeller särskilt vanliga. Den första är **exponentiell tillväxt**, som betyder att något växer med en faktor k varje tidseenhet. Om startvärdet antas vara a blir formeln så här:

$$a \cdot k^t \quad \textit{exponentiell tillväxt} \tag{18}$$



Den andra är **periodisk variation**, som betyder att något svänger upp och ner kring ett normalvärde. Om värdet antas variera från a till $-a$ och tillbaka till a på periodtiden T blir formeln så här:

$$a \sin \frac{2\pi t}{T} \quad \textit{periodisk variation} \tag{19}$$



Här ska $2\pi t/T$ tolkas i radianer, och så är det alltid om man inte säger något annat.

Exempel

Näckrosblad täcker 1 m^2 av en 1 km^2 stor sjö. Den täckta ytan fördubblas varje dygn. När är hela sjön täckt?

1. Välj först beteckningar, en bokstav för varje storhet.
   a (m^2), bladyta, startvärde $= 1$
   A (m^2), bladyta, slutvärde $= 1\,000\,000$
   k, tillväxtfaktor $= 2$
   t, antal dygn

2. Skriv upp ekvationer som gäller, ofta allmänna lagar.

   $A = a \cdot k^t$

3. Lös ut den sökta bokstaven ur ekvationen.
   Det är svårt men det går om man logaritmerar.

$$\ln A = \ln a + t \ln k \tag{20}$$

$$t = \frac{\ln A - \ln a}{\ln k} \tag{21}$$

4. Sätt in givna värden och gör beräkningen.

$$t = \frac{\ln 1\,000\,000}{\ln 2} \approx 20$$

Den som kan tvåpotenserna 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ser att tio fördubblingar gör något cirka tusen gånger större och tio till alltså cirka en miljon gånger större. Då behövs inga logaritmer!

Exempel

Vid högvatten mitt på dagen når vattnet i Liverpools hamn ända till kajkanten. Lågvattenmärket är hela åtta meter lägre. När på eftermiddagen har vattnet sjunkit sex meter?

1. Välj först beteckningar, en bokstav för varje storhet.
   Tidvatten är ett periodiskt fenomen med perioden $T = 12$ timmar. Sex timmar före högvatten var det lågvatten och tre timmar före högvatten var det normalvärde. Vi räknar därför tiden t i timmar efter klockan 09.00. I Liverpool är amplituden $a = 4$ meter. Vi räknar därför höjden h i meter över normalmärket fyra meter under kajkanten.

2. Skriv upp ekvationer som gäller, ofta allmänna lagar.

$$h = a \sin \frac{2\pi t}{T}$$

3. Lös ut den sökta bokstaven ur ekvationen.
   Det är för svårt, vi får pröva oss fram i stället.

4. Sätt in givna värden och gör beräkningen.

$$-2 = 4\sin\frac{2\pi t}{12}$$
$$\sin\frac{\pi}{6}t = -\frac{1}{2}$$

t	$\sin\frac{\pi}{6}t$
0	0
1	1/2
2	$\sqrt{3}/2$
3	1
4	$\sqrt{3}/2$
5	1/2
6	0
7	-1/2

Svar: Sju timmar efter 09.00, alltså 16.00.

Övningar

1.29: Varför är luften i fotbollen tyngre än luften spelarna andas? Ändra formeln så att den tar hänsyn till detta fenomen.

1.30: Du ska beräkna en flaggstångs höjd på ett smart sätt genom att mäta dess skugga (fyra meter) och en kompis skugga (en meter). Om kompisen är 1,75 lång, hur lång är flaggstången? Modellera situationen!

1.31: Saturnus ligger lite drygt nio gånger så långt från solen som jorden gör. Hur långt är ett Saturnusår? Modellera och använd (17).

1.32: Använd (15) för att beräkna hur lång tid det tar att värma två liter vatten i en vattenkokare med effekten 2240 W.

1.33: Efter hur många dygn är halva sjön täckt av näckrosblad?

1.34: Ett hemligt recept på hudkrämen *Skinnpaj* anger nio olika komponenter och hur stora volymer av dessa som ingår. Med kännedom om literpriserna för dessa komponenter, ställ upp en formel för priset per liter Skinnpaj om vinsten ska vara 1000%.

1.35: Periodiska förlopp kan lika gärna skrivas

$$a\cos\frac{2\pi t}{T}$$

men då måste t räknas från en annan starttid. Vad blir starttiden i vattenståndsexemplet?

1.36: En cylindrisk flaska med diametern 8 cm och höjden 20 cm väger 1 kg. Duger den för flaskpost?
Ledning: Ett föremål flyter om det väger mindre än samma volym vatten.

1.37: (Värsting) Skriv en formel för vanlig femtioperiodig 230 V växelspänning. Ledning: Toppvärdet är $\sqrt{2}$ gånger högre än effektivvärdet.

2 Faktorisering

När kan man skriva ett polynom som en produkt av polynom av lägre grad, till exempel $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$, och varför skulle man någonsin vilja göra det?

Som teknolog behöver du ställa dig dessa frågor, och som vi snart ska se leder de till förvånansvärt vacker matematik! Men först ska vi bygga upp intuitionen för faktorisering genom att titta på motsvarande fråga för vanliga heltal: När kan man faktorisera ett heltal, till exempel $153 = 9 \cdot 17$, och varför skulle man någonsin vilja göra det? Även detta leder till vacker matematik.

2.1 Primfaktorisering

Om man har 90 kolor att fördela lika på ett antal godispåsar, hur många påsar kan man ha? En matematiker skulle formulera frågan så här: Vilka positiva heltal är delare till 90?

För att svara på frågan försöker vi först skriva 90 som en produkt av två mindre positiva heltal, till exempel $90 = 9 \cdot 10$. Både 9 och 10 kan faktoriseras ytterligare så vi får $90 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$. Talen 2, 3 och 5 är bara delbara med sig själva och 1 och kan därför inte skrivas som en produkt av mindre tal. Sådana tal kallas *primtal* och $90 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$ är en *primfaktorisering* av 90. Talet 1 är per definition inget primtal utan det minsta primtalet är 2.

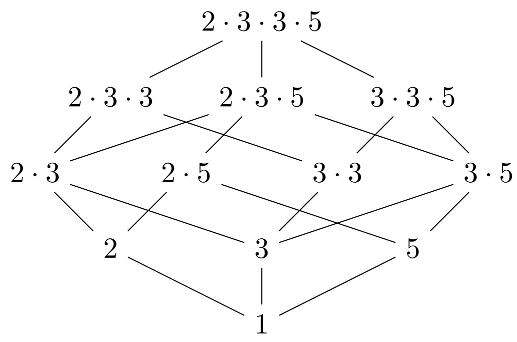
primtal
primfaktorisering

Vad hade hänt om vi hade valt ett annat sätt att faktorisera 90? Låt oss pröva till exempel $90 = 6 \cdot 15$. Både 6 och 15 kan faktoriseras ytterligare så vi får $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Om man bortser från ordningen blev det precis samma primfaktorisering som förut. Det var ingen slump, utan så blir det alltid. Euklides visade denna berömda sats som vi ger utan bevis:

Sats 2.1 (Aritmetikens fundamentalsats)**.** *Varje heltal större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal på ett unikt sätt (om man inte tar hänsyn till faktorernas ordning).*

aritmetikens fundamentalsats

Från aritmetikens fundamentalsats är det lätt att inse att delarna till 90 är följande tal, där 90 självt står överst.



förkortning

Primtal kommer också väl till pass vid bråkräkning. Om täljaren och nämnaren i ett bråk har en gemensam faktor kan man förkorta bort den. Till exempel är

$$\frac{180}{280} = \frac{18 \cdot 10}{28 \cdot 10} = \frac{18}{28}.$$

största gemensamma delare

Eftersom 2 delar både 18 och 28 kan vi förkorta ytterligare och skriva $18/28 = 9/14$, men sedan går det inte att förkorta längre. I stället för att förkorta bort först 10 och sedan 2 hade vi förstås kunnat förkorta bort 20 direkt — resultatet hade blivit detsamma. Detta tal 20 är det största tal som delar både 180 och 280 och det kallas för *största gemensamma delare*. Om man har primfaktoriserat täljare och nämnare är det lätt att hitta den största gemensamma delaren.

$$\frac{180}{280} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{5}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 7}.$$

Primfaktorer som finns i både täljaren och nämnaren kan vi förkorta bort och produkten av dessa är den största gemensamma delaren.

En tredje situation där det kan löna sig att primfaktorisera är när man ska förenkla rotuttryck. Låt oss säga att du har löst en uppgift i en mattebok och fått svaret $\sqrt{180}$. Du kollar i facit men där står det $6\sqrt{5}$. Typiskt! Men med primfaktorisering ser man att

$$\sqrt{180} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5}$$

så du hade räknat rätt i alla fall!

Övningar

2.1: Gör en lista över alla primtal mindre än 50.

2.2: Bestäm alla positiva delare till 204.

2.3: Förkorta 495/525 så långt det går genom att primfaktorisera både täljare och nämnare.

2.4: Förenkla

$$\frac{\sqrt{450}-\sqrt{392}}{\sqrt{2}}$$

så långt det går.

2.5: (Värsting) Det står i texten att det är ”lätt att inse” från aritmetikens fundamentalsats att delarna till 90 är just talen i figuren. Hur inser man det?

2.2 Polynomdivision

Ett *polynom* i x är ett uttryck av typen polynom

$$7x^3-2x^2+5x+9.$$

Talen 7, -2, 5 och 9 som står framför potenserna av x kallas *koefficienter* och de behöver inte alls vara heltal utan kan vara vilka reella tal som helst (eller komplexa tal om man så vill), bara de inte beror av x. Koefficienten 9 som står framför den osynliga potensen x^0 kallas också *konstantterm* eftersom hela den termen är oberoende av x. Den högsta exponenten 3 är polynomets *grad* och motsvarande term $7x^3$ kallas *högstagradsterm*.

koefficienter

konstantterm

grad

högstagradsterm

Om man adderar två polynom får man förstås ett nytt polynom. Till exempel är

$$(3x^4-7x^2)+(x^4+1)=4x^4-7x^2+1.$$

Ett polynom minus ett annat blir också ett polynom, och faktum är att också produkten av två polynom blir ett polynom, som i följande exempel.

$$\begin{aligned}(3x^2 - x + 2)(5x + 1) &= 3x^2(5x + 1) - x(5x + 1) + 2(5x + 1)\\ &= (15x^3 + 3x^2) - (5x^2 + x) + (10x + 2)\\ &= 15x^3 - 2x^2 + 9x + 2.\end{aligned}$$

rationellt uttryck

Men kvoten mellan två polynom kallas för ett *rationellt uttryck* och är i allmänhet inte ett polynom. I detta avseende beter sig polynom alltså precis som heltal — sådana kan ju också adderas, subtraheras och multipliceras, men om man dividerar två heltal m och n krävs en väldig tur för att kvoten m/n också ska bli ett heltal. Om man råkar ha sådan tur heter det att *n delar m* eller att *m är delbart med n*, och samma terminologi kan vi använda för polynom. Till exempel är $15x^3 - 2x^2 + 9x + 2$ delbart med $5x + 1$ som vi såg ovan. Ofta säger man också att $15x^3 - 2x^2 + 9x + 2$ *har faktorn* $5x + 1$ eftersom $15x^3 - 2x^2 + 9x + 2$ kan skrivas som $5x + 1$ gånger ett polynom.

Hur dividerar man då två polynom? Låt oss ta exemplet

$$q(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 3}.$$

Vi ska alltså hitta ett polynom $q(x)$ sådant att

$$(x - 3)q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Metoden är att först välja $q(x)$ så att vänsterledet blir *ungefär* lika med högerledet och sedan stegvis justera $q(x)$ så att approximationen blir bättre och bättre.

- Vi tar först sikte på högerledets högstagradsterm x^3. För att vänsterledet ska få högstagradstermen x^3 måste $q(x)$ ha högstagradstermen x^2. Men $(x - 3)x^2 = x^3 - 3x^2$ så vi får en kvadratisk term $-3x^2$ på köpet.
- Den kvadratiska termen i högerledet är $-6x^2$ så det saknas $-3x^2$ i vänsterledet. Då är vi inte dummare än att vi låter $q(x)$ även innehålla termen $-3x$ och provar igen: $(x - 3)(x^2 - 3x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Nu stämmer både den kubiska och den kvadratiska termen, men vi fick en linjär term $9x$ på köpet.
- Vi vill ha den linjära termen $11x$ så vi behöver ytterligare $2x$. Alltså låter vi $q(x)$ även innehålla termen 2. Tredje gången gillt: $(x - 3)(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Hurra, det stämmer!

Att konstanttermen -6 råkade bli rätt i detta exempel visar att divisionen går jämnt upp. Det vanliga när man försöker dividera två polynom är att det inte går ihop sig på slutet utan man får en rest (som också är ett polynom), men vi ska inte fördjupa oss i detta under kursen.

Det går att ställa upp polynomdivision med liggande stolen precis som man gör med division av tal, men man måste inte. Be din övningsassistent visa ett exempel om du är intresserad!

Övningar

2.6: Utför polynomdivisionen

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 17x - 15}{x - 3}.$$

2.7: Utför polynomdivisionen

$$\frac{14x^4 - 23x^3 - 11x^2 + 23x - 3}{7x^2 + 6x - 1}.$$

2.3 Polynomfaktorisering

Nu ställer vi oss frågan: Vad är motsvarigheten till primtal i polynomens värld?

Ett ickekonstant[2] polynom är *reducibelt* om man kan skriva det som en produkt av två ickekonstanta polynom. Kan man inte det är polynomet *irreducibelt* och det är sådana polynom som motsvarar primtal. Det finns också en motsvarighet till aritmetikens fundamentalsats:

irreducibelt polynom

Sats 2.2. *Varje polynom kan skrivas som en konstant gånger en produkt av irreducibla polynom med högstagradskoefficient 1, och den faktoriseringen är unik om man bortser från faktorernas ordning.*

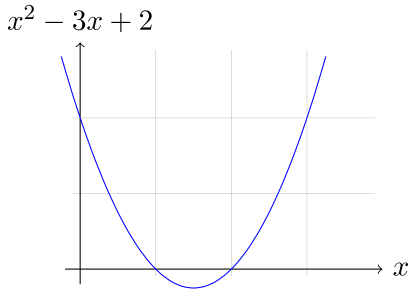
Beviset hör hemma i en mer avancerad kurs.

[2] Ett polynom kallas *konstant* om det bara innehåller en konstantterm.

Då återstår frågan hur man kan avgöra om ett polynom är irreducibelt. Alla förstagradspolynom är förstås irreducibla, men inte alla andragradspolynom. Till exempel är x^2-3x+2 reducibelt för det kan skrivas som en produkt $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ av två polynom av lägre grad. Andragradspolynomet x^2+1 är däremot irreducibelt för om vi försöker skriva det som $(x+a)(x+b)$ måste vi välja talen a och b så att $x^2+1=x^2+(a+b)x+ab$ och då måste $a+b$ vara noll och ab vara ett. Försök att hitta två tal med summan noll och produkten ett!

Finns det irreducibla polynom av högre grad än två?

För att svara på den frågan måste vi först utforska en annan sida hos polynom. Hittills har vi bara tänkt på polynom som uttryck, som formella summor där varje term är en koefficient gånger en potens av x. Men ett polynom är förstås också en *funktion* som som tar emot ett tal som indata och matar ut ett tal som utdata. Om vi till exempel ger funktionen $p(x)=x^2-3x+2$ talet 4 som indata matar den ut talet $p(4)=4^2-3\cdot 4+2=6$. Funktioner kan man i sin tur tänka på som grafer om man vill; här är grafen för x^2-3x+2:



nollställe

De x som har $p(x)=0$ kallas *nollställen* till polynomet, och i grafen ovan ser vi att 1 och 2 verkar vara nollställen till x^2-3x+2. För att kontrollera detta kan vi stoppa in 1 och 2 i stället för x:

$$p(1)=1^2-3\cdot 1+2=0,$$
$$p(2)=2^2-3\cdot 2+2=0.$$

Det stämmer! Men om vi minns faktoriseringen $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ behöver vi inte grafen för att hitta nollställena. De står ju där mitt framför näsan på oss, och kontrollen blir nästan trivial:

$$p(1)=(1-1)(1-2)=0,$$
$$p(2)=(2-1)(2-2)=0.$$

Vi har just observerat att om ett polynom har faktorn $x - a$ så är a ett nollställe till polynomet. Fantastiskt nog gäller även omvändningen, och vi har följande sats som vi ger utan bevis.

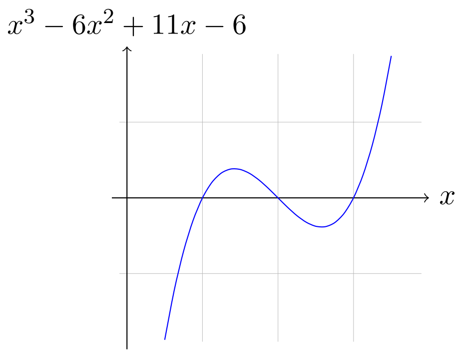
Sats 2.3 (Faktorsatsen)**.** *Ett polynom har a som nollställe om och endast om polynomet har faktorn $x - a$.* faktorsatsen

Faktorsatsen är användbar när man känner till ett nollställe till ett tredjegradspolynom och vill hitta övriga nollställen om de finns.

Anta till exempel att vi vill hitta alla nollställen till polynomet $x^3-6x^2+11x-6$ och att vi redan vet att 3 är ett nollställe. Då säger faktorsatsen att $x^3-6x^2+11x-6$ är delbart med $x-3$ och vi kan utföra polynomdivisionen

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3} = x^2-3x+2.$$

Alltså är $x^3-6x^2+11x-6 = (x-3)(x^2-3x+2)$ och övriga nollställen till $x^3-6x^2+11x-6$ måste också vara nollställen till x^2-3x+2. Dessa kan vi hitta med till exempel pq-formeln eller kvadratkomplettering, eller så minns vi faktoriseringen $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$. Nollställena till $x^3-6x^2+11x-6$ är alltså 1, 2 och 3. Så här ser funktionsgrafen ut:



Om vi hade tillgång till ett orakel som kan hitta nollställen till polynom om de finns, då skulle vi kunna faktorisera polynom genom att använda faktorsatsen upprepade gånger, så här:

- Först ber vi oraklet om ett nollställe till polynomet $p(x)$ som vi vill faktorisera. Oraklet svarar med ett tal a_1.

- Enligt faktorsatsen vet vi att vi kan skriva $p(x) = (x-a_1)p_2(x)$ för något polynom $p_2(x)$.

- Nu ber vi oraklet om ett nollställe till polynomet $p_2(x)$. Oraklet svarar att a_2 är ett nollställe.

- Enligt faktorsatsen vet vi att vi kan skriva $p_2(x) = (x - a_2)p_3(x)$ för något polynom $p_3(x)$.

- Så här kan vi fortsätta så länge oraklet kan svara, och på det sättet kan vi skriva $p(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)q(x)$ där $q(x)$ är ett polynom utan nollställen.

Följande sats, först bevisad av Carl Friedrich Gauss (1777–1855), är så nära man kan komma ett sådant orakel.

algebrans fundamentalsats

Sats 2.4 (Algebrans fundamentalsats)**.** *Varje ickekonstant polynom har minst ett komplext nollställe.*

Satsen gäller bara om man tillåter komplexa tal som nollställen; det är inte säkert att det finns något reellt nollställe.

Här är en bild på Gauss:

Om vi räknar med komplexa tal visar orakelproceduren ovan tillsammans med algebrans fundamentalsats att polynom av grad minst 2 alltid kan skrivas som en produkt av förstagradspolynom. Det är alltså bara förstagradspolynom som är irreducibla över komplexa tal. Andragradspolynomet $x^2 + 1$ som normalt är irreducibelt blir reducibelt när man räknar komplext, för $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$.

Exempel

Låt oss hitta alla komplexa nollställen till polynomet $x^2 - 2x + 5$ genom att använda pq-formeln.

$$x = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

Nollställena är alltså $1 + 2i$ och $1 - 2i$.

Som du märker kommer de komplexa nollställena till andragradspolynom alltid i konjugerade par, $a + bi$ och $a - bi$. Det går att visa att detta gäller för alla polynom med reella koefficienter (men vi utelämnar beviset).

Sats 2.5. *De ickereella komplexa nollställena till ett polynom med reella koefficienter kommer i konjugerade par.*

Låt oss återgå till frågan vi ställde förut, innan vi började blanda in komplexa tal: Finns det irreducibla polynom av högre grad än två?

Ta polynomet $p(x) = x^4 + 11x^2 + 10x + 50$ som exempel. Är det irreducibelt?

Enligt algebrans fundamentalsats har det minst ett komplext nollställe, och ett sådant råkar vara $1+3i$. Eftersom nollställena kommer i konjugerade par är också $1 - 3i$ ett nollställe. Faktorsatsen ger då att $\big(x - (1 + 3i)\big)$ och $\big(x - (1 - 3i)\big)$ är faktorer i $p(x)$ och eftersom dessa faktorer är olika och irreducibla är också deras produkt en faktor i $p(x)$. (Båda faktorerna ingår nämligen i den unika irreducibla faktoriseringen av $p(x)$.) Om vi använder konjugatregeln på produkten får vi

$$(x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i) = (x - 1)^2 - (3i)^2 = (x - 1)^2 - 9i^2 = (x - 1)^2 + 9$$

eftersom $i^2 = -1$. Detta är ett andragradspolynom med reella koefficienter. Alltså kan $p(x)$ skrivas som produkten av två andragradspolynom och följaktligen är $p(x)$ reducibelt.

Med samma resonemang kan man visa att alla irreducibla polynom har grad 1 eller 2.

Övningar

2.8: Polynomet $p(x) = 4x^3 - 20x^2 - x + 5$ har ett nollställe i $x = 5$. Bestäm övriga nollställen.

2.9: Är polynomet $p(x) = x^3 + 3x^2 - x + 2$ delbart med $x + 2$?

2.10: (Värsting) Hitta alla (reella) nollställen till polynomet $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$.

2.4 Polynomekvationer och deras historia

Enligt algebrans fundamentalsats har varje ickekonstant polynom minst ett komplext nollställe, men hur bär man sig åt för att hitta ett nollställe?

För förstagradspolynom är det busenkelt: $ax + b = 0$ har den unika lösningen $x = -b/a$ (om $a \neq 0$).

Andragradare är svårare men kunde lösas med kvadratkomplettering redan av babylonierna. Med pq-formeln får man lösningen direkt:

$$x^2 + px + q = 0 \iff x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

I början av 1500-talet anordnades ibland tävlingar i att lösa polynomekvationer av grad tre. När den italienske matematikern Scipione del Ferro (1465–1526) upptäckte en formel för att lösa den allmänna tredjegradsekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ fick man börja tävla i att lösa fjärdegradsekvationer i stället, men strax därefter hittade Ludovico Ferrari (1522–1565) en formel även för dessa.

Finns det en formel för femtegradsekvationer? Nej, den norske matematikern Niels Henrik Abel (1802–1829) visade att det inte finns någon sådan formel, i alla fall inte om man bara får använda de fyra räknesätten och rotutdragning. Men vissa polynomekvationer av grad fem och uppåt kan förstås lösas med dessa operationer, till exempel har ju ekvationen $x^5 = x$ lösningarna 0, 1, -1, i och $-i$. Den franske matematikern Évariste Galois (1811–1832) redde ut exakt vilka polynomekvationer som kan lösas med hjälp de fyra räknesätten och rotutdragning.

Abel

Galois

Både Abel och Galois dog mycket unga. Abel fick tuberkulos och dog vid 26 års ålder strax innan han skulle ha fått veta att han utnämnts till professor vid Berlins universitet. Galois var ett missförstått geni som satt i fängelse två gånger. När han kom ut ur fängelset blev han förälskad, men tyvärr var han inte ensam om att uppvakta flickan så det blev duell mot rivalen. Som tur är hann han skriva ner några genialiteter i ett brev till en vän dagen före.

Slutligen måste det betonas att trots att det inte finns en formel som löser polynomekvationer av grad fem och uppåt går det utmärkt för en ingenjör att lösa sådana ekvationer. Med *numeriska metoder* kan man nämligen hitta approximativa lösningar med godtyckligt många korrekta decimaler. Detta är också anledningen till att nästan ingen kan formlerna för tredje- och fjärdegradsekvationer utantill — det är helt enkelt onödigt.

3 Bevis

Alla kan göra påståenden, men bara matematiker kan bevisa dem. Den vanligaste formen av bevis är när man går fram stegvis och via delresultat så småningom når målet. Så här ser det ut i princip.

Sats: $A, B, C \Rightarrow Z$

Bevis :
$$\begin{aligned} A, B, C &\Rightarrow D \\ A, B, C, D &\Rightarrow E \\ A, B, C, D, E &\Rightarrow Z \end{aligned}$$

A, B, C kallas *premisserna*, D, E är delresultat och Z slutsatsen. Så här ser ett enkelt exempel ut.

Sats: Om m och n är jämna tal så är talet $m + n$ jämnt.
Bevis:

$m = 2r$ (definition av jämn)

$n = 2s$ (definition av jämn)

$m + n = 2r + 2s$ (addition av ekvationer)

$m + n = 2(r + s)$ (räkneregler)

$m + n$ är jämnt (definition)

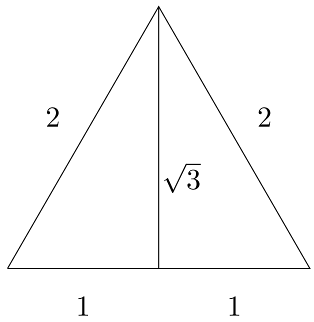
Så här bevisas de flesta satserna i Euklides geometribok Elementa, till exempel Pytagoras sats att $a^2 + b^2 = c^2$ i en rätvinklig triangel. Men en av de mest berömda satserna som inte gäller geometri bevisas på ett bakvänt sätt, som är mycket användbart.

3.1 Motsägelsebevis

Sats: Det finns oändligt många primtal.
Bevis: Anta att påståendet är falskt! I så fall finns bara ändligt många primtal $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, p$ och vi kan kalla det största för p. Alla heltal har i så fall sina primfaktorer bland dessa $2, 3, 5 \ldots, p$. Men se på jättetalet $q = 1+2{\cdot}3{\cdot}5 \cdots p$. Det kan inte vara delbart med något av talen $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, p$. Vi har fått en motsägelse och det visar att vårt antagande var felaktigt.

Ett delresultat som har eget intresse kallas *hjälpsats* eller med ett grekiskt ord *lemma*. Beviset för ett lemma sparas ofta till efter huvudsatsens bevis. Det är inte helt logiskt men ofta mer lättläst.

Sats: Ett triangulärt område med omkretsen sex meter har högst arean $\sqrt{3}$ kvadratmeter.
Bevis: En liksidig triangel med sidan 2 kan delas i två rätvinkliga trianglar med hypotenusan 2 och kateterna 1 och $\sqrt{3}$. Pytagoras sats säger nämligen att $1 + 3 = 4$. Den stora triangelns area blir då $\sqrt{3}$.



Enligt nästa lemma har en liksidig triangel den största arean av trianglar med given omkrets och därmed är satsen bevisad.
Lemma: Den största triangeln med given omkrets är den liksidiga.
Bevis: Anta motsatsen! Då har den största triangeln någon sida a som är längre än en annan sida b. Ersätt dessa båda sidor med ett snöre med längden $a + b$, låt C vara sidornas gemensamma hörn och kalla de andra hörnen A och B. Lägg C mot en spegel parallell med AB och kalla spegelpunkterna A' och B'. Då ser det ut som om ett snöre går från A till B' och ett annat från B till A', båda med en knyck vid C. Dra AB från spegeln (medan punkten C får röra sig längs spegeln) tills snörena rätats ut! Snörlängden $a + b$ är oförändrad men arean ökar eftersom höjden mot sidan AB ökar. Motsägelsen ger lemmat.

3.2 Induktion

När man tar en tårtbit ska man alltid lämna hälften kvar till dem som kommer efter.
Den första får alltså $\frac{1}{2}$ tårta och lämnar kvar $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Den andra får $\frac{1}{4}$ tårta och lämnar kvar $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.
Den tredje får $\frac{1}{8}$ tårta och lämnar kvar $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.

Uppenbarligen gäller följande samband.

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

Flytta nu över minustermerna till höger och gamla högerledet till vänster.

Sats:

$$1 - \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}, \quad \forall n \geq 1$$

induktion

Egentligen är det oändligt många påståenden i satsen, ett för varje n. Det känns som att man då måste ha ett bevis för varje n också, men i själva verket kan man visa hela satsen med ett *induktionsbevis* som bara har två steg. Låt oss skriva P_1 för påståendet när $n = 1$, P_2 för påståendet när $n = 2$ osv. Då räcker det att bevisa två saker:

P_1 är sann	basfallet
$P_n \Rightarrow P_{n+1}, \quad \forall n$	induktionssteget

Påståendet P_1 betyder $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ och det är sant.
Påståendet $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ betyder

$$1 - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \;\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Det är också sant, för om man adderar $1/2^{n+1}$ till båda leden i P_n får man just P_{n+1}.

Ett induktionsbevis består alltid av två delar – basfall och induktionssteg. Basfallet glöms ofta bort och då kan man bevisa hur tokiga saker som helst.

Exempel

Bevisa att $n + n < 2n, \quad \forall n$.
P_n är $n + n < 2n$. Adderas 2 till båda leden får man $n + n + 2 < 2n + 2$ och det kan skrivas som $(n + 1) + (n + 1) < 2(n + 1)$, vilket är P_{n+1}.

Om man vill använda induktion eller annat bevissätt är ofta en smaksak.

Exempel

När n människor träffas och alla säger hej till alla blir det $n(n - 1)$ hej.
Bevis: Varje person säger hej till $n - 1$ andra. För alla n personerna tillsammans blir det $n(n - 1)$ hej.
Induktionsbevis: Basfallet $n = 1$ är sant. Anta att det är sant för n personer och att person $n + 1$ dyker upp och hejar på dessa n. Antalet ökar då till $n(n - 1) + 2n$ och det kan skrivas som $(n + 1)n$, vilket är just P_{n+1}.

Övningar

3.1: Bevisa att $n(n-1)$ är ett jämnt tal för alla $n \geq 1$.

3.2: Gör ett induktionsbevis för samma påstående.

3.3: Hitta felet i följande bevis för att $1 = 0$.

$$a = 1 \;\Rightarrow\; a^2 = a \;\Rightarrow\; a^2 - 1 = a - 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (a+1)(a-1) = 1 \cdot (a-1) \;\Rightarrow\; (a+1) = 1 \;\Rightarrow\; a = 0.$$

3.4: Bevisa att vanliga (aritmetiska) medelvärdet $(x+y)/2$ är större än eller lika med geometriska medelvärdet $\sqrt{xy}$ om x och y är positiva.
Ledning: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$.

3.5: Om n personer träffas och skakar hand, hur många handslag blir det?

3.6: Bevisa att $n(n-1)(n-2)$ är delbart med 6 för alla $n \geq 2$.

3.7: Gör ett motsägelsebevis för att alla primtal större än 2 är udda.

3.8: Du cyklar i 30 km/h en sträcka tur och retur. Om det blåser höjs hastigheten i medvind och sänks lika mycket i motvind. Bevisa att turen tar kortast tid vid vindstilla.

3.9: (Värsting) Bevisa formeln

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

4 Blandade övningar

4.1: Vilka av följande påståenden är sanna?

(a) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z},\ x \cdot y = 1$,

(b) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Q},\ x \cdot y = 1$,

(c) $\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q},\ x \cdot y = 1$.

4.2: Vilka av följande påståenden är sanna för alla reella tal x och y?

(a) $|x - y| > 0 \Rightarrow x > y$,

(b) $x > y \Rightarrow |x - y| > 0$,

(c) $|x - y| > 0 \Leftrightarrow x > y$.

4.3: Vilka av följande påståenden är sanna?

(a) 17 är ett primtal,

(b) 15 och 21 har en gemensam faktor,

(c) $\sqrt{90}/15 = \sqrt{2/5}$.

4.4: Faktorisera polynomet $p(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$ så långt det går. Tips: Vad är $p(1)$?

4.5: *Ett tal är rationellt om och endast om det är kvoten mellan två heltal.* Skriv detta med symboler!

4.6: Bevisa att alla tvåsiffriga tal som inte är primtal är delbara med 2, 3, 5 eller 7.

4.7: Skriv $\{x > 0 \mid |x^2 - 5| < 4\}$ som ett intervall.

4.8: Vilka av följande påståenden är sanna?

(a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{R},\ y < n$

(b) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N},\ y < n$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{R},\ n < y$

(d) $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N},\ n < y$

4.9: Hitta felet i följande induktionsbevis för att alla människor heter Lasse Svensson.

> För alla positiva heltal n ska vi visa att i varje grupp på n personer heter alla Lasse Svensson. Basfallet när $n = 0$ är sant, för i en godtycklig grupp på noll personer heter onekligen alla Lasse Svensson.
> Anta nu att påståendet är sant för n personer och betrakta en grupp på $n + 1$ personer. Vi ska visa att alla i denna grupp heter Lasse Svensson. Plocka ut en godtycklig person x ur gruppen. De kvarvarande n personerna utgör en grupp på n personer så enligt induktionsantagandet heter alla dessa Lasse Svensson. Sätt nu tillbaka x och plocka i stället ut en annan person y från gruppen. Kvarvarande personer är n till antalet och heter sålunda Lasse Svensson, däribland x. Alltså heter alla $n + 1$ personer Lasse Svensson.

4.10: Alla heltal som slutar på en udda siffra är udda. Är följande bevis för detta påstående korrekt?

> Låt n vara ett godtyckligt heltal. Vi ska visa att om sista siffran i n är udda så måste n vara udda. Anta motsatsen: att n är udda men att sista siffran i n är jämn. Om vi låter d beteckna den sista siffran i n kan n skrivas som $n = 10k + d$. Eftersom d är jämn är $d = 2m$ för något heltal m. Alltså är $n = 10k + 2m = 2(5k + m)$ vilket strider mot antagandet att n är udda – en motsägelse.

4.11: Beräkna $\displaystyle\sum_{n=0}^{100}(-1)^n$.

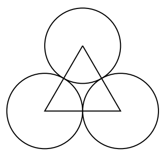
4.12: Beräkna $\prod_{n=0}^{100}(-1)^n$.

4.13: Beräkna $(1-k)(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1})$. Använd detta för att härleda en formel för $1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}$ (en geometrisk serie).

4.14: En stipendiefonds kapital ger en viss årlig ränta och betalar en fast stipendiesumma årligen. Modellera!
Sök fonden $x(t)$ efter t år. Starta med x_0 kronor.

4.15: Kalla medelvärdet av a och b för m. Bevisa att $a^2+b^2 \geq 2m^2$. Tips: Visa först lemmat $\exists s,\ a=m+s,\ b=m-s$.

4.16: På en enorm bordsyta ligger enkronor tätt packade. Bevisa att mynten täcker $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ av ytan. Ledning: Det räcker att se på triangeln i figuren.



4.17: Vad sägs här?

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, q \in \mathbb{Q},\ |x-q| < \varepsilon$$

Är det sant? Kolla med $x=\pi$ och $\varepsilon = 0{,}01$.

4.18: $\frac{6!}{3!3!} = 20$ men vad blir uppskattningen med Stirlings formel?

5 Lösningar

—

1.1
Arkimedes, tidernas kanske största matematiker, härledde för cirka 2200 år sedan formler för klotets area och volym.

—

1.2
Cosinus fi är noll om och endast om fi är plusminus pi halva plus två n pi, för något heltal n. Med andra ord är $\cos\varphi$ noll för följande värden på φ:

$$\dots, +\frac{\pi}{2}-2\pi, -\frac{\pi}{2}-2\pi, +\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}+2\pi, -\frac{\pi}{2}+2\pi, +\frac{\pi}{2}+4\pi, -\frac{\pi}{2}+4\pi, +\frac{\pi}{2}+6\pi, \dots$$

—

1.3
Rhokvadrat plus sigmakvadrat plus två rho sigma är större än eller lika med två rho plus två sigma. För $\rho = 1, \sigma = 1$ får man $4 \geq 4$, vilket är sant. För $\rho = 1, \sigma = 0$ får man $1 \geq 2$, vilket inte stämmer.

—

1.4
Absolutbeloppet för x är lika med roten ur x-två. Om x är positivt är det förstås sant. Om x är negativt tar $|x|$ bort minustecknet och minuset försvinner också i x^2, så tecknet ändrar ingenting.

—

1.5
Med $n = 3$ blir det $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)$. Stämmer! För $n = 0$ får vi $1 = 1 \cdot 0!$. Tydligen bör nollfakultet tolkas som ett, så då gör vi det.

—

1.6
En tom produkt ska tolkas som 1.

—

1.7
$k = 10$, $n = 19$. Ett smart sätt att kolla summan med huvudräkning är att summera första och sista termen $1 + 19 = 20$, näst första och näst sista $3 + 17 = 20$ osv till det femte paret $9 + 11 = 20$. Fem tjugor är en hundring, så det stämmer.

—

1.8

$\pi^2/6 \approx 1{,}65$ men $1 + 1/4 + 1/9 \approx 1{,}36$ och

$$\frac{1}{1-1/4} \cdot \frac{1}{1-1/9} = 1{,}5. \tag{22}$$

—

1.9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad = \prod_{\text{primtal}\, p} \frac{1}{1-1/p^k} \quad \text{för alla } k > 1$$

—

1.10

Eftersom $e \approx 2{,}7$ blir $n/e \approx 10$. Huvudräkning ger $\sqrt{2\pi n} \approx 13$. Tydligen blir då $27! \approx 13 \cdot 10^{27}$ som tycks ha tjugonio siffror.

—

1.11

$x < x + 1$ eller varför inte $0 < 17$.

—

1.12

$0 < x^2$ eller varför inte $x \neq 0$.

—

1.13

$0 < (x-1)^2$ (eller naturligtvis $x \neq 1$).

—

1.14

Addera 7 till båda leden.	$5x > 2x + 12$
Addera $-2x$ till båda leden.	$3x > 12$
Dividera båda leden med 3.	$x > 4$

Svar: Det gäller för x större än 4.

—

1.15

Som förut får man $x^2 \geq 4$. Här får man tänka på två fall. Om x är positivt gäller $x \geq 2$. Om x är negativt gäller $x \leq -2$. Båda kan uttryckas som att $|x| \geq 2$.

Svar: Det gäller om absolutbeloppet av x är större än eller lika med 2.

—

1.16

$a = -3,\ b = -2$

—

1.17
Att funktionen $y = f(x)$ är växande betyder att det är uppförsbacke åt höger, alltså att om man går åt höger på x-axeln från a till b, så går samtidigt y-värdena uppåt från $f(a)$ till $f(b)$. Med e^x som $f(x)$ får man olikheten $e^a < e^b$.

—

1.18

$$a < b \;\Leftrightarrow\; e^a < e^b$$

Vi vet att $a \geq b$ ger $e^a \geq e^b$, så enda möjligheten att få $e^a < e^b$ är att vi har $a < b$. Sätt $e^a = \alpha$ och $e^b = \beta$. Då är $a = \ln\alpha$ och $b = \ln\beta$ och resultatet kan skrivas så här.

$$\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; \ln\alpha < \ln\beta$$

—

1.19
Man kan rita kurvan $y = x^2 - 3x + 2$ och ser då att den går under x-axeln mellan $x = 1$ och $x = 2$. Då kanske man får idén att skriva olikheten så här.

$$(x-1)(x-2) < 0$$

Om produkten av två tal är negativ måste det ena talet vara positivt och det andra negativt. Det kan bara inträffa då $1 < x < 2$.

—

1.20
För alla tal mellan 1 och 17 är avståndet till 9 högst 8. Sant!

—

1.21
$\{n \in \mathbb{N} \,|\, 10 \leq n \leq 99\}$

—

1.22
Mängden av alla negativa heltal.

—

1.23
$(3,4,5)$ är tvetydigt så $(3.4,5)$ är kanske bättre. Dessutom är det nog snyggare med $\{x \;:\; |x-4{,}2| < 0{,}8\}$ än med $\{x \mid |x-4{,}2| < 0{,}8\}$.

—

1.24
Enklast är att ta $A = \mathbb{R}$ och $B = \mathbb{Z}$. Roligare är att låta A vara unionen av

alla intervall av typen $[2r, 2r+1]$ och B unionen av alla intervall av typen $[2r-1, 2r]$, där r löper över alla heltal.

—

1.25
$J = \{2r \,|\, r \in \mathbb{N}\}$
$U = \{2r+1 \,|\, r \in \mathbb{N}\}$

—

1.26
$x \in U \;\Rightarrow\; x^2 \in U$

—

1.27
Det är faktiskt samma påstående som det föregående, uttryckt annorlunda.
$n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \big(n^2 \in J \;\Rightarrow\; n \in J\big)$

—

1.28
Börja uppräkningen med alla bråk som kan skrivas med siffrorna 0 och 1.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \cdots\}.$$

Fortsätt med alla som kan skrivas med 0, 1 och 2 (men upprepa dej inte).

$$\mathbb{Q} = \{\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots\}.$$

Alla bråk i $\mathbb{Q}$ blir så småningom uppräknade.

—

1.29
Den har ungefär dubbelt så högt tryck. Om bollens lufttryck är k atmosfärer blir formeln så här.

$$m = k \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

—

1.30
L_f (m), flaggstångens längd
S_f (m), flaggstångsskuggans längd
L_k (m), kompisens längd
S_k (m), kompisskuggans längd

$$\frac{L_f}{S_f} = \frac{L_k}{S_k}$$
$$L_f = L_k \cdot S_f / S_k$$
$$L_f = 1{,}75 \cdot 4/1 = 7$$

Flaggstången är alltså sju meter.

—

1.31

r_J (km), jordens avstånd till solen
v_J (km/år), jordens hastighet
s_J (km), jordens banlängd
t_J (år), jordens omloppstid = 1
r_S (km), Saturnus avstånd till solen
v_S (km/år), Saturnus hastighet
s_S (km), Saturnus banlängd
t_S (år), Saturnus omloppstid

$v_J = \text{konstant}/\sqrt{r_J}$ (enligt (17))
$s_J = 2\pi r_J$ (cirkelns omkrets)
$v_J \cdot t_J = s_J$ (fart gånger tid = sträcka)
$v_S = \text{konstant}/\sqrt{r_S}$ (enligt (17))
$s_S = 2\pi r_S$ (cirkelns omkrets)
$v_S \cdot t_S = s_S$ (fart gånger tid = sträcka)
$r_S = 9r_J$, (givet i texten)

Man kan lösa ut den efterfrågade variabeln och får då

$$t_S = 9\sqrt{9}\, t_J = 27$$

Saturnusåret är alltså drygt 27 jordår.

—

1.32

$$t = T \cdot c_p \cdot \rho \cdot V/P = 80 \cdot 4200 \cdot 1000 \cdot 0{,}002/2240 = 300$$

Det tar fem minuter.

—

1.33
Om det tar tjugo dygn att täcka hela sjön tar det förstås nitton dygn att täcka halva sjön.

—

1.34
Låt p_k (kr/l) vara literpriset för den k-te komponenten och v_k (l) vara dess volym enligt receptet. Receptet framställer då $v = \sum v_k$ liter hudkräm till en kostnad av $c = \sum p_k v_k$ och literkostnad för krämen är alltså c/v. För att göra tusen procents vinst ska man sälja krämen för literpriset

$$11\,\frac{\sum p_k v_k}{\sum v_k}.$$

Som hittat!

—

1.35
Kollar man cosinuskurvan ser man att den har maximum för $t = 0$. Man ska alltså räkna t från klockan 12.00.

—

1.36
Bottenarean är $\pi r^2 = 16\pi \approx 50{,}265$ och volymen alltså $20 \cdot 50{,}265 = 1005{,}3$ milliliter. Det undanträngda vattnet väger 1005 g och flaskan själv väger bara 1000 g, så den flyter. Flaskposten får dock inte vara för omfattande, högst fem gram, och det är just vad ett vanligt A4-blad väger.

—

1.37
Periodtiden T är en femtiondels sekund, så formeln blir så här.

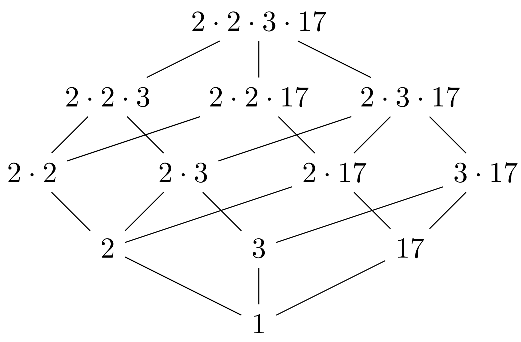
$$U = 230 \cdot \sqrt{2}\,\sin(100\pi t)$$

—

2.1
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

—

2.2
Talet 204 har primfaktoriseringen $204 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$ och här är delarna:



—

2.3

$$\frac{495}{525} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{5} \cdot 11}{\cancel{3} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 7} = \frac{33}{35}.$$

—

2.4

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{450} - \sqrt{392}}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} - \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1. \end{aligned}$$

—

2.5

Om m delar 90 kan 90 skrivas som en produkt $90 = m \cdot n$ för något positivt heltal n. Om m och n har primfaktoriseringarna $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ och $n = q_1 q_2 \cdots q_\ell$ har 90 primfaktoriseringen $p_1 p_2 \cdots p_k q_1 q_2 \cdots q_\ell$. Eftersom primfaktorisering är unik måste primfaktorerna $p_1, p_2, \ldots p_k$ kunna väljas bland 2, 3, 3 och 5.

—

2.6

Kvoten blir $x^2 - 4x + 5$.

—

2.7

Kvoten blir $2x^2 - 5x + 3$.

—

2.8

Enligt faktorsatsen har $p(x)$ faktorn $x - 5$ så vi utför divisionen

$$\frac{4x^3 - 20x^2 - x + 5}{x - 5} = 4x^2 - 1.$$

De övriga nollställena till $p(x)$ är precis nollställena till $4x^2 - 1$. Enligt konjugatregeln är $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$ som kan skrivas som $4(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$ och alltså har nollställena $\frac{1}{2}$ och $-\frac{1}{2}$.

—

2.9

Enligt faktorsatsen behöver vi bara undersöka om -2 är ett nollställe till $p(x)$. Eftersom $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - (-2) + 2 = -8 + 3 \cdot 4 + 2 + 2 = 8 \neq 0$ är -2 inte ett nollställe och alltså är $p(x)$ inte delbart med $x + 2$.

—

2.10

Eftersom x delar polynomet har det ett nollställe i $x = 0$ och kan skrivas som $p(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)x$. I övrigt har $p(x)$ precis samma nollställen som $x^3 + x^2 + x + 1$. Hade detta varit ett andragradspolynom hade vi kunnat använda pq-formeln, men eftersom vi inte kan någon motsvarande formel för tredjegradare får vi helt enkelt pröva oss fram. Strax upptäcker vi då att -1 är ett nollställe, ty $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = (-1) + 1 + (-1) + 1 = 0$. Enligt faktorsatsen innehåller $x^3 + x^2 + x + 1$ faktorn $x + 1$ och vi utför divisionen

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} = x^2 + 1.$$

Kvoten $x^2 + 1$ har inga (reella) nollställen (för summan av två kvadrater är ju alltid positiv) så $p(x) = x(x + 1)(x^2 + 1)$ har endast nollställena 0 och -1.

—

3.1

Antingen n eller $n - 1$ är ett jämnt tal, alltså delbart med 2.

—

3.2

Basfallet: $n = 1 \Rightarrow n(n - 1) = 0$ och noll är jämnt.
Induktionssteget: $n(n - 1) = 2r \Rightarrow (n + 1)n = 2r + 2n = 2(r + n)$.

—

3.3

Felet är divisionen med $(a - 1)$ eftersom det är noll.

—

3.4
$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ (kvadraten på något blir aldrig negativt).
Men $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$ (kvadreringsregeln).
Alltså är $x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$.
Omskrivning ger $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ och division med 2 ger satsen.

—

3.5
Ett handslag motsvarar två hej, så exemplet i texten ger svaret $n(n-1)/2$.

—

3.6
Av tre konsekutiva tal är alltid ett delbart med 3 och minst ett delbart med 2. Därmed är saken klar, men det går förstås också med induktion.
Basfallet: $n = 2 \;\Rightarrow\; n(n-1)(n-2) = 0$ och noll är delbart med 6.
Induktionssteget: $n(n-1)(n-2) = 6r \;\Rightarrow\; (n+1)n(n-1) = 6r + 3n(n-1)$
Och eftersom $n(n-1)$ är jämnt blir allting delbart med 6.

—

3.7
Anta att för något primtal $p > 2$ gäller $p = 2r$. Eftersom primtal bara är delbara med sig själva och 1 måste $p = 2$. Motsägelsen ger beviset.

—

3.8
Om vindhastigheten är v km/h och sträckan är s km blir tiden

$$\frac{s}{30+v} + \frac{s}{30-v} = \frac{(30-v)s + (30+v)s}{(30+v)(30-v)} = \frac{60s}{900-v^2}$$

Med $v = 0$ blir nämnaren så stor som möjligt och därmed tiden så kort som möjligt.

—

3.9
Basfallet: $n = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$
Induktionssteget:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

—

4.1
Inget av påståendena är sant för om x är noll finns inget tal y sådant att $x \cdot y = 1$.

—

4.2
Endast påstående (b) är sant.

—

4.3
Alla tre påståendena är sanna.

—

4.4
$p(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 5)$.

—

4.5

$$x \in \mathbb{Q} \;\Leftrightarrow\; \exists\, p, q \in \mathbb{Z},\; x = \frac{p}{q}$$

—

4.6
Ett tal som inte är ett primtal kan skrivas som en produkt $p \cdot q$, där p och q båda är heltal större än 1. Om $p \cdot q < 100$ måste någon av p och q vara mindre än 10. Alltså måste någon av p och q tillhöra mängden $\{2, 3, \ldots, 9\}$ och alla tal i den mängden är delbara med 2, 3, 5 eller 7.

—

4.7
Olikheten $|x^2 - 5| < 4$ kan också skrivas $1 < x^2 < 9$ och för positiva x svarar det mot intervallet $(1, 3)$.

—

4.8
(a), (b), (c) är sanna, (d) är falsk.

—

4.9
Felet ligger i steget när man plockar ut ”en annan person y från gruppen”. Om $n + 1 = 1$ finns det nämligen ingen *annan* person att välja. Induktionssteget gäller alltså inte från $n = 0$ till $n = 1$ och då faller hela induktionen.

—

4.10
Nej, felet är att motsatsen till påståendet ”om sista siffran i n är udda så är

n udda" inte är "n är udda och sista siffran i n är jämn" utan "sista siffran i n är udda och n är jämn".

—

4.11
$1-1+1-1+\cdots+1=1.$

—

4.12
$1\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot\cdots\cdot 1=1$ eftersom det är femtio minus.

—

4.13
Vi har att

$$(1-k)(1+k+k^2+\cdots+k^{n-1})=1+k+k^2\cdots+k^{n-1}-k-k^2-k^3-\cdots-k^n=1-k^n.$$

Om vi dividerar både vänster- och högerledet med $1-k$ får vi en formel för en geometrisk serie:

$$1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}=\frac{1-k^n}{1-k}\text{ om }k\neq 1.$$

—

4.14
Vi inför beteckningarna p för räntesatsen och s för stipendiesumman. Efter ett år är fondens kapital $x(1)=x_0(1+p)-s$, efter två år blir det $x(2)=x(1)(1+p)-s=x_0(1+p)^2-s(1+p)-s$, efter tre år blir det $x(3)=x(2)(1+p)-s=x_0(1+p)^3-s(1+p)^2-s(1+p)-s$, och så vidare. Efter t år är fondens kapital

$$x(t)=x_0(1+p)^t-s\big(1+(1+p)+\cdots+(1+p)^{t-1}\big)=x_0(1+p)^t-s\cdot\frac{(1+p)^t-1}{p},$$

där vi har använt formeln för en geometrisk serie.

—

4.15
Sätt $s=\frac{a-b}{2}$. Eftersom $m=\frac{a+b}{2}$ blir då $a=m+s$ och $b=m-s$. Nu är $a^2+b^2=(m+s)^2+(m-s)^2=2m^2+2s^2\geq 2m^2$ eftersom kvadrater alltid är ickenegativa.

—

4.16
I triangeln finns tre sjättedels cirklar som tillsammans har arean $\frac{3}{6}\pi r^2$, där r är cirklarnas radie. Triangeln är liksidig med arean $\frac{2\sqrt{3}}{2}r^2$. Andelen av ytan som täcks av mynt är alltså $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

—

4.17

För varje reellt tal och varje positivt epsilon finns ett rationellt tal närmare än avståndet epsilon. Det är sant! Till exempel har $\frac{314}{100} \in \mathbb{Q}$ mindre avstånd från $\pi = 3{,}14159\ldots$ än 0,01.

—

4.18

Stirlings formel ger

$$(2n)! \approx \sqrt{2\pi \cdot 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$$

$$n! \cdot n! \approx 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$$

så

$$\frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

och stoppar vi in $n = 3$ får vi ungefär $\frac{64}{3{,}1} \approx 20{,}5$.