KTH Institutionen för matematik 24 maj 1997
Jockum Aniansson, Håkan Eliasson, Ari Laptev

Tentamenskrivning i Differentialekvationer och transformer II (5B1202), del 1 och del 2 för T2 och E2; del 2 för F2, lördagen den 24 maj 1997 kl. 14.00–19.00.

Tillåtna hjälpmedel: BETA (även kopior ur BETA) och Transformteori del 2 (av Mats Neymark).
TEXTA på omslaget Ditt namn och **STRYK UNDER Ditt efternamn** så att Din tentamen blir insorterad under rätt bokstav. Skriv också på omslaget hur många bonuspoäng Du anser Dig ha rätt till.
Välj *rätt* variant genom att noga läsa igenom nedanstående

Följande gäller för E2 och T2 **och** *för alla dem* från E, F och T, som **redan** har 2 studiepoäng i denna kurs:
Tentamen består av de åtta första uppgifterna av vilka fyra är från del 1 och fyra är från del 2. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Eventuella bonuspoäng ger högst 4 poäng sammanlagt (högst 2 poäng från varje del).
Totalsumman är $8\times 3+4 = 28$ p. För godkänt krävs minst 12 poäng totalt *inklusive bonus* **och åtminstone** 4 poäng **från varje del** *exklusive bonus*.

Betygsgränser:				
	poäng	12–16.5	17–21.5	22–28
	betyg	3	4	5

En godkänd tentamen ger 4 studiepoäng.

Följande gäller för F2 **och** *för alla dem* från E, F och T, som **redan** har 3 studiepoäng i denna kurs:
Tentamen består av de sex sista uppgifterna som alla är från del 2. Skriv utanpå omslaget att tentamen gäller del 2. Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Eventuella bonuspoäng ger högst 2 poäng.
Totalsumman är $6\times 3+2 = 20$ p. För godkänt krävs minst 9 poäng totalt *inklusive bonus*.

Betygsgränser:				
	poäng	9–12.5	13–16.5	17–20
	betyg	3	4	5

En godkänd tentamen ger 3 studiepoäng.

Det är i Ditt eget intresse att svara klart och redigt och att beskriva Dina uträkningar med korta kommentarer på svenska. Se till att Du svarar på de frågor som ställs! Det är endast sådana svar som Du får poäng på. Därför är det också viktigt att Du för varje uppgift och deluppgift anger vilket Ditt svar är.

För dem som tenterar del 1 och del 2

Uppgift 1. a) Bestäm $y(2)$ om $y(t)$ är en lösning till differentialekvationen

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t,y) \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Som f får Du välja någon — vilken Du vill — av nedanstående funktioner

$$(i) \quad f(t,y) = \frac{y}{1-y^2}t + y \quad \text{eller} \quad (ii) \quad f(t,y) = \frac{t}{1-t^2}y + t \quad \text{eller}$$

$$(iii) \quad f(t,y) = 2y^2 + ty \quad \text{eller} \quad (iv) \quad f(t,y) = 2y^2 + ty^2.$$

b) Ange lösningens existensintervall och skissa dess integralkurva.

Uppgift 2. Låt $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ vara en lösning till det linjära systemet

$$\bar{y}' = A\bar{y}, \quad \bar{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kombinera ihop de tre plottarna a)-c) av en bit av faskurvan $\{\bar{y}(t)\}$ med de de tre plottarna (i)-(iii) av en bit av kurvan $\{(t, y_1(t)\}$. Vad kan Du i dessa tre fall säga om egenvärdena till 2×2-matrisen A? (Se speciellt blad med plottar.)

Uppgift 3. Låt $(x(t), y(t))$ vara en lösning, som inte är en jämviktslösning, till systemet

$$\begin{cases} x' &= x + x^2 + y^2 \\ y' &= y - xy. \end{cases}$$

Antag att $(x(t), y(t))$ närmar sig ett tillstånd (a, b) då $t \to \infty$. Bestäm (a, b). Motivering fordras för full poäng.

Uppgift 4. a) Bestäm Z-transformen av den allmänna lösningen till differensekvationen

$$y(n+2) - y(n+1) + \frac{2}{9}y(n) = \frac{1}{9}\frac{1}{2^{n+2}}, \qquad n \geq 0.$$

b) Bestäm $y(n)$ om $y(0) = y(1) = 1$.

För alla

Uppgift 5. a) Utveckla i Fourierserie på cosinus–sinus–form den periodiska funktion $f(t)$ med period 2 som ges av $f(t) = t - t^3$ då $-1 < t \leq 1$. Beräkna Fouriekoefficienterna.

b) Använd resultatet för att visa att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}.$$

Lös uppgift 6A (främst avsedd för F och T) **eller** 6B (främst avsedd för E).

Uppgift 6A. Lös differentialekvationen

$$-y''(t) + y(t) = \arctan(t)\,\delta''(t), \qquad t \in R.$$

Uppgift 6B. Låt $y(t)$ beskriva utslaget för en lineariserad gunga med den drivande kraften $f(t)$.
a) Lös DE

$$y''(t) + y(t) = f(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad \text{med begynnelsevillkoren} \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 2\,,$$

där $f(t)\,,\ t \geq 0,$ är en tills vidare obestämd funktion.
b) Bestäm utslaget $y(t)$ vid tiden $t = 5\pi/2$.
c) Antag nu att kraftfunktionen är begränsad av noll och ett, dvs
$0 \leq f(t) \leq 1$ för alla $t \geq 0$, men för övrigt godtycklig.
Hur skall kraften $f(t)$ väljas för att maximera utslaget $y(5\pi/2)$ vid den utvalda tidpunkten $5\pi/2$?

Uppgift 7. Bestäm den kontinuerliga funktion $y(t)$ på $[0, \infty)$ som ges av att $y(0) = 1$ och

$$ty(t) - \int_0^t e^{2(u-t)} y(u)\,du = t^2 e^{-2t}, \qquad t \geq 0.$$

Lös uppgift 8A (främst avsedd för E) eller 8B (främst avsedd fr̈ F och T).
Uppgift 8A. Låt ordet *system* nedan betyda *linjärt tidsinvariant system*. Givet DE

$$y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = f(t)\,, \quad \text{där} \quad y = y(t) \quad \text{och} \quad -\omega_0 < \alpha < \omega_0\,.$$

a) Om vi antar att funktionen $y(t)$ är insignalen till ett system S_1 med $f(t)$ som utsignal, så beskrivs systemet enkelt av en låda med texten $P(D)$ på:
$y(t)$ in ; ut kommer $P(D)y = f(t)$.
Har detta system överföringsfunktion och/eller frekvensöverföringsfunktion? Är det kausalt och/eller stabilt?
b) Betrakta nu omvänt funktionen $f(t)$ som insignalen till ett system S_2 och $y(t)$ som motsvarande utsignal. Vad blir nu svaren på de fyra frågorna under a) ovan?
Ledtråd: *Vissa* av frågorna kan bero på om $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ eller $\alpha > 0$.

Uppgift 8B. a) Bevisa Poissons summationsformel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Omega), \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T},$$

där $F(\omega) = \mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega)$.
b) Använd funktionen

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}, \qquad a > 0,$$

för att beräkna summan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}.$$

För dem som tenterar enbart del 2

Uppgift 9. Antag att $f(t)$ är en deriverbar periodisk funktion med period T och $\int_0^T f(t)\,dt = 0$. Visa att

$$\int_0^T |f(t)|^2\,dt \le \Omega^{-2} \int_0^T |f'(t)|^2\,dt, \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Uppgift 10. Välj konstanten c sådan att funktionerna $\varphi_1(t) = t^2$ och $\varphi_2(t) = c + \cos(\pi t)$ är ortogonala på intervalet $[0, 1]$ med avseende på skalärprodukten

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Bestäm konstanterna a och b så att integralen

$$\int_0^1 |t - a\varphi_1(t) - b\varphi_2(t)|^2\,dt$$

blir så liten som möjligt.