Andraderivata av en funktion av en funktion — kedjeregeln.

Antag att z är en funktion av u och v, medan u och v i sin tur är funktioner av x och y. Hur beräkna andraderivator såsom z_{xy} och z_{xx} ?

Här kan man rita ett beroendeschema (beroendediagram) med z på översta raden, u och v på mellersta raden samt x och y på nedersta raden. (Man kan också göra de flesta parenteser nedan större.)

Vi skriver konsekvent $z_u = \dfrac{\partial z}{\partial u}$, $z_v = \dfrac{\partial z}{\partial v}$, $z_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ osv.

Observera att t ex $(z_u)_v = \dfrac{\partial}{\partial v}(z_u) = \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = z_{uv}$.

Steg 1.

Kedjeregeln ger $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ eller $z_x = z_u\, u_x + z_v\, v_x$.

Steg 2.

Nu skall vi taga $\frac{\partial}{\partial y}$ av detta. Då måste vi behandla z_u och z_v som funktioner av x och y *via* u och v så att (*precis som för* z själv!)

$$\frac{\partial}{\partial y}(z_u) = \frac{\partial}{\partial u}(z_u)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}(z_u)\frac{\partial v}{\partial y} = z_{uu}\, u_y + z_{uv}\, v_y$$

och på samma sätt få

$$\frac{\partial}{\partial y}(z_v) = \dots = z_{vu}\, u_y + z_{vv}\, v_y \, .$$

Vidare ger Leibniz att

$$\frac{\partial}{\partial y}(z_u\, u_x) = \frac{\partial}{\partial y}(z_u)\, u_x + z_u\, \frac{\partial}{\partial y}(u_x) = \frac{\partial}{\partial y}(z_u)\, u_x + z_u\, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(z_u)\, u_x + z_u\, u_{yx} \; .$$

När allt detta sätts samman får vi

$$z_{xy} = (z_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(z_x) = \frac{\partial}{\partial y}(z_u\, u_x + z_v\, v_x) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(z_u)\, u_x + z_u\, \frac{\partial}{\partial y}(u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(z_v)\, v_x + z_v\, \frac{\partial}{\partial y}(v_x) =$$

$$= (z_{uu}\, u_y + z_{uv}\, v_y)\, u_x + z_u\, u_{xy} + (z_{vu}\, u_y + z_{vv}\, v_y)\, v_x + z_v\, v_{xy} = \dots \; .$$

Detta är det allmänna formeln för z_{xy} . För z_{xx} förfar man på samma sätt men byter ut *alla* y'n ovan mot x .