Fischer-kärnor och Cauchy-problem för vågekvationen

Låt $P(w)$ och $Q(z)$ vara två polynom i n komplexa variabler. Vi söker en uppdelning av exponentialkärnan $\mathrm{e}^{w\cdot z} = \exp(w_1 z_1 + \cdots w_n z_n)$ som en summa $\mathrm{e}^{w\cdot z} = h(w,z) + g(w,z)$, där $P(D_z)\,h = 0$ och $Q(z)$ delar g. Om det entydigt existerar hela funktioner $h(w,z)$ och $g(w,z)$, av exponentiell typ med avseende på z, som uppfyller detta, så kallar vi dem *Fischer-kärnor.* I så fall får vi också en uppdelning m a p det duala paret $Q(D_w)$ och $P(w)$, dvs *även* $P(w)$ delar g, samtidigt som $Q(D_w)\,h = 0$. Vidare finns en **moderfunktion** G som uppfyller
$g(w,z) = P(w)\,Q(z)\,G(w,z)$,
$\mathrm{e}^{w\cdot z} = P(D_z)\,Q(z)\,G(w,z)$,
$\mathrm{e}^{w\cdot z} = Q(D_w)\,P(w)\,G(w,z)$.
Om vi först byter ut w mot $-iw$ och sedan (för de z för vilket detta är möjligt) tager (invers) Fouriertransform m a p $w \in \mathbf{R}^n$ som tempererade distributioner, så får vi uppdelningen $\delta_z(s) = \delta(s-z) = \eta(s,z) + P(-D_s)\,Q(z)\,\mathcal{G}(s,z)$, där $P(D_z)\,\eta(s,z) = 0$ och $Q(s)\,\eta(s,z) = Q(s)\,\eta_z(s) = 0$ (η kommer från h, och $\mathcal{G}$ kommer från G). Observera att distributionen η_z lever där $Q(s) = 0$, $s \in \mathbf{R}^n$.
Om vi nu parar δ-ekvationen m a p s med en (tillräckligt snäll) funktion $\varphi(s)$, så får vi, *genom att vända på resonemanget,* för givna funktioner ψ och f lösningen φ till det inhomogena Cauchy–Goursat–problemet i $\mathbf{R}^n$,

$$\begin{cases} P(D)\,\varphi = \psi\,, \\ \qquad\quad \varphi = f \quad \text{då} \quad Q = 0\,, \quad \text{egentligen:} \quad Q(z) \quad \text{delar} \quad \big(\ \varphi(z) - f(z)\ \big) \end{cases},$$

medelst formlerna (parning m a p variabeln s)
$\varphi = \varphi_{\text{hom}} + \varphi_{\text{part}}$, där $\varphi_{\text{hom}}(z) = \langle\ \eta_z \mid f\ \rangle$ och $\varphi_{\text{part}}(z) = Q(z)\ \langle\ \mathcal{G}_z \mid \psi\ \rangle$.
Det syns att $\mathrm{Gr}(s,z) = Q(z)\,\mathcal{G}_z(s) = Q(z)\,\mathcal{G}(s,z)$ är **Greens funktion**.

Exempel 1. $w' = (w_1,\ldots,w_{n-1})$, $\omega^2 = w_1^2 + \cdots + w_{n-1}^2$, $P(w) = \omega^2 - w_n^2$, $P(D_z) =$ vågoperatorn, $Q(z) = z_n^2$. Här blir

$$h(w,z) = \mathrm{e}^{w'\cdot z'}\left(\cos(iz_n\omega) + w_n z_n \frac{\sin(iz_n\omega)}{iz_n\omega}\right),$$

vilket efter Fouriertransformering ger lösningen till vågekvationen med dubbla data på initialmängden $Q = z_n^2 = 0$, där z_n är tiden. Då $n = 4$ (tre rumsdimensioner) får vi Kirchhoffs formel.

Exempel 2. P som ovan, och $Q = P$. Då är $Q = 0$ på ljuskonen $(z')^2 - z_n^2 = 0$, och vi får en lösning till det karakteristiska Cauchy-problemet för vågekvationen med data på denna kon.

Litteraturhänvisning.

Jockum Aniansson, *Some integral representations in real and complex analysis. Peano–Sard kernels and Fischer kernels.* Doktorsavhandling, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm (1999).

www.math.kth.se/~jockum