KTH **Diff & Trans II, del 2, för E, F & T** **mars 1998**
Matematik Lindstedsvägen 25

Datorlaboration om höga frekvenser

En periodisk signal eller funktion $f(t)$ kan delas upp i frekvenskomponenter medelst Fourierserieutveckling. Om f har period T och grund(vinkel)frekvens Ω får vi FS = Fourierserien

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{ik\Omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t \, .$$

För *tillräckligt snälla kontinuerliga* funktioner f gäller att

$$S(t) = f(t) \qquad \text{för alla} \quad t\,, \tag{$\spadesuit$}$$

MEN detta skall vi nu *inte* antaga utan istället försöka se om det stämmer.

Kontrollera att Du förstår följande påståenden *innan* Du går vidare.

- Fourierdelsumman $S_0(t) = c_0 = a_0/2$ beskriver likströmskomponenten hos den periodiska strömmen $f(t)$.
- Fourierdelsumman $S_1(t) = a_0/2 + a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t$ beskriver likströmskomponenten plus den lägsta växelströmskomponenten hos den periodiska strömmen $f(t)$.

För måttliga värden på N (t ex $N \leq 10$) kan vi säga att

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \, e^{ik\Omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$$

beskriver lågfrekvensinnehållet hos signalen $f(t)$.
Resten $R_N(t) := f(t) - S_N(t)$ kallar vi *residualen*, så att $f = S_N + R_N$.

- Visa att, *om* vi får antaga ($\spadesuit$), så gäller att

$$R_N(t) = \sum_{|k|>N} c_k \, e^{ik\Omega t} = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t \, .$$

Därför kan vi säga att R_N utgör högfrekvensinnehållet hos signalen f.

[* En mer detaljerad uppdelning av signalen vore i tre delar med $M < N$, t ex $M = 1$ eller 2 , och $N = 10$ eller 20 :

lågfrekvensinnehållet	$S_M(t)$	$= \sum_{\lvert k\rvert \leq M} c_k \, e^{ik\Omega t}$	,
medelfrekvensinnehållet	$S_N(t) - S_M(t)$	$= \sum_{M<\lvert k\rvert \leq N} c_k \, e^{ik\Omega t}$	och
högfrekvensinnehållet	$R_N(t)$	$= \sum_{\lvert k\rvert > N} c_k \, e^{ik\Omega t}$	.]

Ett utmärkt sätt att kontrollera att de tre viktigaste Fourierkoefficienterna a_0, a_1 och a_2 är rimliga, är att *i samma figur* plotta funktionen $f(t)$ och Fourierdelsumman $S_1(t)$. Gör det nedan för varje ny FS som kontroll.
Vi skall nu undersöka högfrekvensinnehållet $R_N(t) = f(t) - S_N(t)$ hos en ganska snäll funktion $f(t) = B_3(t)$ med period 1 given av

$$f(t) = B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\,, \qquad \text{då } 0 \le t \le 1\,.$$

Anmärkning. Polynomet B_3 är ett Bernoullipolynom, vilket förklarar beteckningen.
a) Beräkna alla Fourierkoefficienter till funktionen B_3, både de exponentiella c_k och de trigonometriska a_n, b_n.

Lämpliga kommandon då man vill plotta en *periodisk utvidgning* av en given funktion i maple är tex att skriva $B_3(\mathtt{t} - \mathtt{floor(t)})$ istället för $B_3(\mathtt{t})$. Detta gäller för funktioner med period ett. För funktioner av x med allmän period T kan man behöva ersätta `x` med `x − T*floor(x/T)`. Är den ursprungliga funktionen $g(x)$ given på intervallet $a < x < a + T$, kan man pröva om $g(\mathtt{x} - \mathtt{T*floor((x - a)/T)})$ ger rätt periodisk utvidgning.

b) Plotta den periodiska funktionen $f(t)$. Plotta över åtminstone *två* perioder. Detta gäller *alla figurer* nedan.
c) Plotta några delsummor S_N medelst t ex maple för små värden på N och jämför med f.
d) Plotta högfrekvensinnehållet $R_N = f - S_N$ för *flera* olika N–värden. Pröva tex $N = 10,\ 20,\ 30$. Se till att figurerna inte blir för små och pluttriga, speciellt i y–led! Var tycks det finnas "mest" av de höga frekvenserna?
e) Upprepa sedan för derivatan av B_3: Beräkna högfrekvensinnehållet och plotta.

Välj nu åtminstone en av följande uppgifter, helst båda.
g) Snickra *själv* ihop en egen *kontinuerlig* periodisk funktion (här godkänns inga diskontinuerliga periodiska funktioner) med tex hörn (typ $|t|$ i origo) *i stil med* den T–periodiska trekantvågen $f(t) = |t|$, då $|t| \le T/2$.
Beräkna dess Fourierkoefficienter och rita upp dess högfrekvensinnehåll.

h) Här kommer en kontinuerlig funktion Q_3 med två olika brytpunkter (=skarvar), given av

$$Q_3(x) = \begin{cases} -3x^2 - 4x + 2\,, & -2 \le x \le 0\,, \\ 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2\,, & 0 \le x \le 2\,, \\ \text{period } 4\,. \end{cases}$$

Plotta Q_3 över flera perioder. (Ett mapletips är kommandot `piecewise`.) Syns skarvarna med blotta ögat? För att beräkna FS till Q_3 kan man derivera en eller två gånger och först beräkna FS till $Q_2(x) = dQ_3(x)/dx$ eller till $Q_1(x) = d^2Q_3(x)/dx^2$. Låt sedan tex maple kontrollberäkna Fourierkoefficienterna för Q_3. Plotta Q_3 och dess S_1. Plotta så S_N och redidualen $Q_3 - S_N$. Giv särskilt akt på storleken hos residualen nära de två brytpunkterna.

Denna datorlaboration skrevs 1997 av Jockum Aniansson.
Den modifierades senast den 10 mars 1998 av JA och Lars Villemoes.