KTH **Diff&Trans II, del 2, för EFT 1996/97**
Matematik
Lv 25 (Lv=Lindstedsvägen)

Inlämningsuppgift om resonans

En periodisk signal eller funktion $f(t)$ kan delas upp i frekvenskomponenter medelst Fourierserieutveckling. Om f har period T och grund(vinkel)frekvens Ω får vi FS = Fourierserien

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ik\Omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\,.$$

För *tillräckligt snälla kontinuerliga* **och** *periodiska* funktioner f gäller att

$$S(t) = f(t) \qquad \text{för alla} \quad t\,.$$

Def. DE = differentialekvation, VL = vänster led, HL = höger led.
Def. $D = \dfrac{d}{dt} =$ deriveringsoperatorn.
Om tex $P(r)$ betecknar polynomet $P(r) = ar^2 + br + c$, så är $P(D)$ deriveringsoperatorn $P(D) = aD^2 + bD + cI = aD^2 + bD + c = \ldots$ och $P(D)y = P(D)y(t) = (aD^2 + bD + c)y(t) = ay''(t) + by'(t) + cy(t)$ samt $P(i\omega) = a(i\omega)^2 + b(i\omega) + c = c - a\omega^2 + ib\omega$ med $P(ik\Omega) = a(ik\Omega)^2 + b(ik\Omega) + c = c - ak^2\Omega^2 + ibk\Omega$.
Vi skall studera fenomenet resonans. Först kommer en teoridel, som varje deltagare bör göra självständigt.
Utgångspunkten är att vi vill lösa en DE med periodiskt högerled,

$$P(D)\,y = f\,.$$

Här är $f = f(t)$ en given funktion (drivande kraft eller spänning) med period $T > 0$ och $P(r)$ ett givet polynom, tex standardpolynomet $P(r) = r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2$, där $\alpha \geq 0$ är ett mått på systemets inneboende friktion eller ohmska motstånd och ω_0 betecknar den egenfrekvens systemet skulle ha om dämpningsfaktorn α plötsligt sattes till noll. Om inget annat sägs kan vi anta att $0 < \alpha < \omega_0$.

a) Antag att $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\, e^{ik\Omega t}$ med Fourierkoefficienter $f_k = c_k(f)$. Beräkna f_k för åtminstone två av funktionerna (se punkt ö nedan):
Fyrkantvåg, trekantvåg, sågtand, parabelbåge, sinusabsolut.
b) Antag att DE ovan med allmänt HL f har en periodisk (=stationär) partikulärlösning

$$y(t) = y_{\text{part}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k\, e^{ik\Omega t}$$

med Fourierkoefficienter $y_k = c_k(y)$. Visa att i så fall måste

$$P(ik\Omega) f_k = y_k \quad \text{för } \textit{alla} \text{ heltal } \ k\,.$$

Fourierkoefficienterna $\{f_k\}$ och $\{y_k\}$ kallas stundom *komplexa amplituder*.
c) Beräkna talen (faktorerna) $\{P(ik\Omega)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ för åtminstone två av polynomen nedan:
$\alpha =$ t ex $1/10,\ 1/20,\ 1/50$; $\quad \omega_0 = \Omega,\ 4\Omega,\ 8\Omega$.
Det intressantaste är fallet $0 < \alpha < \omega_0$ som brukar kallas fallet med *svagt dämpad* egensvängning.
d) Skriv ned den homogena lösningen $y_{\text{hom}}(t)$ till den homogena DE $P(D)y = 0$ för samma polynom som i c) ovan.
Def. System nedan betyder *linjärt tidsinvariant system.*
e) Om vi antar att funktionen $y(t)$ är insignalen till ett system $\mathcal{S}_1$ med $f(t)$ som utsignal, så beskrivs systemet enkelt av en låda med texten $P(D)$ på:

$$y(t) \ \text{ in } \quad ; \quad \text{ut kommer } \quad P(D)y = f(t)\ .$$

— Har detta system överföringsfunktion och/eller frekvensöverföringsfunktion? Är det kausalt och/eller stabilt?
f) Betrakta nu omvänt funktionen $f(t)$ med dess komplexa amplituder f_k som insignalen till ett system $\mathcal{S}_2$ och den stationära lösningen $y(t) = y_{\text{part}}(t)$ (med dess komplexa amplituder y_k) som motsvarande utsignal. Vad blir nu svaren på de fyra frågorna under e) ovan?
g) Visa att talet $\dfrac{1}{P(ik\Omega)}$ kan betraktas som en komplex amplitudförstärkningsfaktor.
h) Visa att vi i fallet f) kan betrakta talen $\{\ \dfrac{1}{P(ik\Omega)}\ \}_{k=-\infty}^{\infty}$ som en diskret frekvensöverföringsfunktion.
i) Plotta nu $f(t)$ och $y(t) = y_{\text{part}}(t)$ med deras amplitudspektra f_k och y_k samt även $y_{\text{hom}}(t)$ medelst tex maple för några olika kombinationer av f och P (med $0 < \alpha < \omega_0$). I stället för att plotta $y(t)$ exakt får man ofta nöja sig med en delsumma $S_N(y;t) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} y_k e^{ik\Omega t}$ till dess Fourierserie. För relativt stora N (pröva själv!) bör det inte synas någon större skillnad.
I detta sammanhang kan man ha glädje av en liten figur i det komplexa talplanet, där man prickar in *dels* nollställena till polynomet P, *dels* de punkter $ik\Omega$ på imaginäraxeln där f_k är speciellt stora (till sitt belopp).
j) Kan Du producera en bild som klart och tydligt visar på fenomenet resonans (insignalen f liten, men utsignalen y stor)? Skulle Du kunna förklara det för "mannen på gatan"?
Pröva tex med mycket små α.
....
ö) Fyrkantvåg: $\quad f(t) = -A,\ -T/2 < t < 0;\quad = A,\ 0 < t < T/2.$
Trekantvåg: $\quad f(t) = -t,\ -T/2 < t < 0;\quad = t,\ 0 < t < T/2\,.$

Sågtand: $f(t) = t,\ 0 < t < T$.
Parabelbåge: $f(t) = Tt - t^2,\ 0 < t < T$.
Sinusabsolut: $f(t) = |\sin(t\pi/T)|$.

————————

Denna datorlaboration uppdaterades den 13 maj 1997 eller senare av Jockum Aniansson.