**KTH** **Diff & Trans II, del 2, för E** **mars 1998**
**Matematik** Lindstedsvägen 25

## Datorlaboration om en svängande gitarrsträng

Vi skall först betrakta odämpade svängningar hos en gitarrsträng. Vi väljer sådana skalor för rumskoordinaten $x$ längs strängen och tidskoordinaten $t$ att *ljudvågor inuti strängen* fortplantas med hastigheten 1. Antag att strängen har längden $L$ och är inspänd vid $x = 0$ och $x = L$. Vi antager att utböjningen $u = u(x,t)$ satisfierar vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L, \quad 0 < t < \infty,$$

med randvillkoren

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad 0 < t < \infty,$$

och begynnelsevillkoren

$$u(x,0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L.$$

Det betyder att strängen är i vila vid tiden $t = 0$ men utspänd som begynnelsefunktionen $g(x)$ anger. Vi skall här låta funktionen $g$ ges av

$$g(x) = \begin{cases} hx/a, & \text{då} \quad 0 < x \le a, \\ h(L-x)/(L-a), & \text{då} \quad a < x < L, \end{cases}$$

där $0 < a < L$. Skissa funktionen $g(x)$, $0 \le x \le L$.
Använd variabelseparation för att lösa DE ovan. Försök hitta en Fourierserie som lösning. Beräkna Fourierkoefficienterna för hand. Kontrollera sedan gärna med maple.
Visa att den långsammaste svängningen har period $2L$.
Substituera nu lämpliga värden, tex $L = 80$, $h = 2$, och $a$ lika med ett av följande tre värden: $a_1 = 10$, $a_2 = 20$ och $a_3 = 40$.
När man plottar serien för $u(x,t)$ kan man trunkera (hugga av) serien efter förslagsvis 10, 20 eller 40 termer.
Använd `animate` för att se vad som händer med $u(x,t)$. Gör en film. Det är lämpligt att ta $0 \le t \le 2L$, ty då bör man kunna spela filmen *non–stop*.

Nu skall vi försöka göra en film som visar dämpade svängningar hos en sträng. Det är tyvärr ej helt lätt att modellera detta med en enkel partiell differentialekvation, som skulle kunna lösas med variabelseparation som ovan. För att ändå få en realistisk film av ett dämpat svängningsförlopp tillgriper vi ett enkelt (och simpelt) trick:
Tag den ovan erhållna serielösningen till den ursprungliga vågekvationen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\, T_n(t)$$

och dämpa varje mod med en tidsfaktor $\exp(-n\,\beta\,t)$, där den "konstgjort" införda dämpningskonstanten $\beta$ bör väljas mycket liten, tex $\beta = 1/2LM$, med $M = 5\,, 10$ eller $20$.
Gör så en ny film. Här passar det nog bättre med $0 \leq t \leq 10L$ eller $0 \leq t \leq 20L$.

När Du är klar skall Du
- ha förstått alla kalkyler och
- ha åtminstone två spelklara filmer med en odämpad och en dämpad sträng.

**Maple-kommandon. (version V.4)**
För att producera en film:

```
> with(plots):
> animate( sin(x*t),x=-10..10,t=1..2,frames=50);
```

Filmen spelas genom att klicka på grafen och sedan på animate-menyn eller "bandspelar"–kontrollerna.

Denna datorlaboration skrevs ursprungligen av Ari Laptev.
Den har senare modifierats av Jockum Aniansson och Lars F Villemoes.

---

Hittills finns bara två helt färdigställda DL = datorlaborationer för del 2 i kursen. Den första DL om höga frekvenser har tidigare delats ut. Båda finns tillgängliga på nätet. För att kunna få bonuspoäng till tentamen måste Du redovisa dessa DL **på det sätt** som övningsgruppledaren bestämmer **senast** torsdagen den 7 maj 1998.

---

**Kursinnehåll**, del 2, taget från sidan www.math.kth.se/users/jockum/dtaktuellt.html eller från kurs–pm på nätet:

Del 2 omfattar hela Jan Peterssons bok om Fourieranalys med nedanstående undantag.

Följande ingår ej:
Bevisen i appendix A1 och A2; hela appendix A3 och A4.

Följande avsnitt läses kursivt:
Avsnitt 3.4 om amplitud-fasvinkelform;
delavsnitten 3.6.1 rippel, 3.6.2 klirr, 3.6.3 decibel;
avsnitt 3.9 om Besselfunktioner;
kapitel 6 om fysikens pde;
appendix A1 och A2, satsernas lydelser (de står alla inrutade).
Dessutom läses avsnitten 11.1 - 11.4 om Sturm–Liouville–teori från Boyce & DiPrima kursivt.

Hela Nåsells kompendium om differensekvationer och Z-transformer ingår.