Diff&Trans II — Datorlaboration om

Riktningsfält och stabilitet

Denna laboration är skriven av Harald Lang, samt något modifierad av Jockum Aniansson.

Du skall studera ekvationen

$$y'(x) = a^2y^2 - b^2x^2 = f(x, y)\,, \tag{1}$$

där a och b är två konstanter som du räknar ut så här: Låt A och B vara näst sista respektive sista från noll skilda siffran i ditt personnummer, och bilda
$a = 0.05A + 0.25$, $\qquad b = 0.05B + 0.25$.

1. Du skall övertyga dig om att du förstått hur riktningsfält räknas ut och hur de genererar integralkurvor (=lösningskurvor).

Rita ut riktningsfältet för ekvationen i ett koordinatsystem med centrum i origo; prova om $-5 < x, y < 5$ är lagom. Printa riktningsfältet på papper. För att kontrollera att du förstått hur riktningsfält beräknas skall du räkna ut riktningsfältets lutning för hand i ett par punkter och kontrollera mot datorplotten att det verkar stämma. **Redovisa vilka punkter du kontrollerat.**

Rita nu in några lösningskurvor för hand på plotten av riktningsfältet. Observera att integralkurvorna har olika kvalitativa beteenden beroende på var de skär y-axeln; se till att du får med alla typer. Låt **sedan** Maple plotta motsvarande lösningskurvor, och jämför med det du ritat. Om det stämmer någorlunda har du förstått hur riktningsfält skall tolkas, om inte får du fundera tills du säkert förstått. **Redovisa dina egna handritade lösningskurvor.**

2. Du skall nu studera begreppet ”stabilitet” något.

Betrakta en differentialekvation $y'(x) = f(x, y)$ med allmänt högerled $f(x, y)$ och antag att $f_y(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} < 0$. Det betyder att funktionen $f(x, y)$ är avtagande som funktion av y. Låt nu $y_1(x)$ och $y_2(x)$ vara två lösningar. Då gäller att

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{y_1(x) - y_2(x)\}^2 &= 2\{y_1(x) - y_2(x)\}\{y_1'(x) - y_2'(x)\}\\ &= 2\{y_1(x) - y_2(x)\}\{f(x, y_1) - f(x, y_2)\}\\ &\le 0\end{aligned}$$

där sista olikheten beror på att de två parenteserna måste ha olika tecken (OK?). Alltså är $\{y_1(x) - y_2(x)\}^2$ en avtagande funktion av x, dvs de två lösningarna $y_1(x)$ och $y_2(x)$ kommer att närma sig — eller åtminstone inte avlägsna sig från — varandra när x ökar. Lösningarna är *stabila* för växande x. (Ordet stabil kan ha många betydelser!)

I vår diffekvation är $f_y(x, y) = 2a^2y$ (se ekv. (1) ovan), så lösningarna är stabila så länge de håller sig under x-axeln, och de är instabila — dvs har en tendens att gå isär — så länge de håller sig ovanför x-axeln.

Plotta nu riktningsfältet igen och lösningen genom origo. Du ser att lösningen går ner åt höger i 4:e kvadranten. Titta nu på riktningsfältet i närheten av integralkurvan i 4:e kvadranten. Du bör kunna se att lösningar som ligger litet ovanför den du plottat "kläms ner" och att de som ligger litet under "kläms upp" mot lösningen du plottat. Det beror naturligtvis på att $f_y < 0$ här, eller hur? Går man uppåt i figuren har riktningsfältet mindre — dvs större negativ — lutning, det är precis det som $f_y < 0$ innebär. Plotta nu även integralkvan genom $(0, -1)$ och se hur lösningarna går ihop för stora x. **Redovisa denna plot.**

Vi skall nu se vad som händer om $y(0)$ är någorlunda stort. Plotta den lösning som går genom $x = x_0,\ y = \frac{b}{a}x_0$, där x_0 är ett någorlunda stort tal, säg $x_0 = 10$ (experimentera om 10 inte fungerar) och kontrollera var denna integralkurva skär y-axeln; kalla detta y-värde y^*. OBS: Punkten (x_0, y_0) är vald så att den skall ligga på (ena) *noll–isoklinen*.

Plotta nu två integralkurvor, en som skär y-axeln strax ovanför y^*, en som skär y-axeln strax under y^*. Du ser att den första sticker upp mot oändligheten längs en vertikal asymptot; lösningen existerar inte ens för alla positiva x. Den andra integralkurvan letar sig ner i 4:e kvadranten och närmar sig de andra integralkurvorna där. Vi konstaterar att lösningen genom $(0, y^*)$ är instabil, som väntat, eftersom f_y är positiv för positiva y, men vi gör också erfarenheten att differentialekvationer kan uppvisa "tröskelbeteenden": en mycket liten förändring av initialvärdena $(0, y_0)$ (från y_0 något mindre än y^* till något större än y^*) kan medföra ett totalt ändrat kvalitativt beteende hos lösningen.

Redovisa plotten som nu bör innehålla tre integralkurvor och **ange vilket värde du fick på** y^*. Alternativt kan du ha en gemensam plot för allt under punkt 2). Eftersom vi inte kan kontrollera att du verkligen läst igenom och förstått vad vi försökt lära ut om stabilitet i punkt 2), får du **deklarera att du gjort det**, skriv "Jag har har tänkt igenom punkt 2) och begripit."

Maple-kommandon.

Ladda in DEtools:

```
> with(DEtools);
```

För att plotta riktningsfältet till ekvationen $y'(x) = 0.1y^2 - 0.1x^2$ för $-7 \le x \le 7,\ -5 \le y \le 5$:

```
> DEplot1(diff(y(x),x)=0.1*y^2-0.1*x^2,y(x),x=-7..7,y=-5..5);
```

För att plotta riktningsfält med integralkurvor till samma differentialekvation med initialvillkoren $y(0) = 0,\ y(0) = 1$ på intervallet $-7 \le x \le 7$:

```
> DEplot1(diff(y(x),x)=0.1*y^2-0.1*x^2,y(x),x=-7..7,{[0,0],[0,1]});
```

Senast modifierad 26 januari 1998 eller senare.