Diff&Trans II — Datorlaboration om ett Hamiltonsystem

skriven av Thomas Höglund; något reviderad av Jockum Aniansson.

Du ska studera lösningarna till ekvationer av formen $x''(t) + v(x(t)) = 0$, där v är en funktion av en variabel.

Låt $y = x'$ och skriv ekvationen som ett system.

1. Lös ekvationen samt rita fasporträtt (i xy-planet) i de två fallen $v(x) = x$ och $v(x) = -x$. (När du ska rita fasporträtt kanske du har användning av några maplekommandon som finns i laborationen om fria svängningar.)

2. Låt nu v vara ett andragradspolynom med två reella nollställen, $v(x) = x(1-x)$ t.ex. Bestäm de kritiska punkterna samt linjärisera kring dessa. Vilka slutsatser kan du dra om dessa punkters karaktär med hjälp av Sats 9.3.2 i Boyce & DiPrima? Rita fasporträtt som är tillräckligt omfattande för att du ska kunna svara på följande frågor: Finns det begynnelsevärden $x(0)$ och $x'(0)$ sådana att lösningen $x(t)$ som funktion av t, $-\infty < t < \infty$,
a) är periodisk,
b) är begränsad uppåt men inte nedåt,
c) tvärtom,
d) är obegränsad både uppåt och nedåt,
e) har exakt ett minimum,
f) har exakt ett maximum?
Ange begynnelsevärde i de fall du svarar ja.

3. Återgå nu till en allmän (kontinuerligt deriverbar) funktion v. Låt V vara en primitiv funktion till v, $V' = v$, och sätt $H(x, y) = V(x) + \dfrac{y^2}{2}$. Vi kallar H en **Hamiltonfunktion** och ett system av formen

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

ett **Hamiltonsystem**. Det system vi studerar är ett Hamiltonsystem. Eller hur? Visa att trajektorierna till lösningarna till ett Hamiltonsystem ligger på nivåkurvor till funktionen H,

$$H(x(t), y(t)) = \text{const}$$

Ett annat sätt att säga samma sak är att y som funktion av x uppfyller en exakt DE. Vilken?

4. De kritiska punkterna till det system vi studerar är av formen $(a, 0)$ där a är en extrempunkt till V. V kan tolkas som systemets lägesenergi och $\frac{y^2}{2}$ som rörelseenergin. De kritiska punkterna är alltså de punkter som har extrem lägesenergi. Vilken typ av kritisk punkt ger maxima upphov till? Vad tror du om de kritiska punkter som svarar mot minima? Försök att bevisa ditt påstående i fallet $v(x) = x(1-x)$ genom att använda dig av resultatet under punkt 3.

Senast uppdaterad den 26 januari 1998 eller senare.