Diff&Trans II — Datorlaboration om

Fria svängningar

skriven av Thomas Höglund; reviderad av Jockum Aniansson.

Du ska studera vilken inverkan dämpningen har på fria svängningar och speciellt beteendet i närheten av vissa kritiska värden på dämpningskonstanten.

Linjär dämpning. Låt oss först anta att dämpningen är proportionell mot hastigheten x'. Här är $x(t)$ t.ex. läget i lodled vid tiden t hos en kropp som hänger i en fjäder. I detta fall upfyller $x(t)$ (efter lämplig skalning av tiden) differentialekvationen

$$x''(t) + 2\,a\,x'(t) + x(t) = 0\,,$$

med dämpningskonstant $a \geq 0$.

1. Lös ekvationen med begynnelsevillkoret $x(0) = x_1$, $x'(0) = x_2$ för samtliga värden på $a \geq 0$. (Här kan du få användning för resultaten i kapitel 3.8 sid. 185 uti BDP = Boyce&DiPrima, sjätte upplagan, om du sätter $m = 1$, $k = 1$ och $\gamma = 2a$.) Lösningen ändrar karaktär vid $a = 0$ och $a = 1$. Eller hur?

2. Låt $y = x'$ och skriv ekvationen som ett system. Rita fyra olika fasporträtt (i xy-planet) för att illustrera de olika fallen. Följande exempel som fungerar i Maple V Release 3 kan kanske komma till användning:

```
>with(DEtools):
>with(plots):
>DEplot([x-2*y,3*x-4*y],[x,y],0..10,{[0,-3,-4],[0,-1,-1],[0,1,2],[0,2,3],
[0,-1,-2],[0,1,1],[0,3,4]},x=-1..1,y=-1..1,stepsize=.2,arrows=THIN);
```

3. För att du ska kunna se vad som händer vid de kritiska a värdena ska du nu rita fasporträtt för ett **antal** a värden som närmar sig 0 respektive 1 (från båda hållen i det senare fallet).

Icke–linjär dämpning. Antag nu istället att dämpningen är proportionell mot hastigheten i kvadrat (vilket i vissa fall är mer realistiskt) och riktad mot rörelseriktningen. Detta leder till ekvationen

$$x''(t) + 2\,b\,x'(t)|x'(t)| + x(t) = 0\,,$$

där konstanten $b \geq 0$.

4. Låt $y = x'$ och skriv ekvationen som ett system. Rita fasporträtt (i xy-planet) för olika värden på den nya dämpningskonstanten b. Jämför med den tidigare modellen. Vilka är likheterna? Skillnaderna?

5. Bestäm systemets kritiska punkter. Linjärisera kring denna. Vilken typ av kritisk punkt är 0 i det linjäriserade systemet? Sats 9.3.2 i BDP går inte att använda för att avgöra om den kritiska punkten är av samma typ i det icke linjära systemet. Eller hur?

6. Rita fasporträtt för några små värden på b, $b = 1/10\,, 1/100\,, 1/1000\,, \ldots$ t.ex. Går det att från fasporträtten säkert sluta sig till vilken typ av kritisk punkt det är frågan om?

7. Låt $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ vara avståndet från origo. Det följer av resultatet under punkt 1 att i den tidigare modellen med linjär dämpning gäller för $0 < a < 1$

$$r(t) \leq \text{const} \cdot e^{-at},$$

där konstanten beror på a och begynnelsevillkoret. Eller hur? I detta fall vet man alltså att avståndet $r(t) \to 0$ expontiellt snabbt då $t \to \infty$.

Hur är det i den icke linjära modellen? Visa först att $r(t)$ är en avtagande funktion av t. Visa också differentialolikheten

$$-r'(t) \leq 2\,b\,r^2\,,$$

varav följer att

$$r(t) \geq \frac{r(0)}{1 + r(0)\,2\,b\,t}\,.$$

Eller hur? (*Ledtråd.* Man kan först tillfälligt ersätta differentialolikheten ovan med DE $-r' = 2\,b\,r^2$, vilken lätt integreras.) Så avståndet $r(t)$ går mycket långsammare mot noll i detta fall om den överhuvudtaget gör det. Vad tror du? Försök att motivera svaret.

Senast uppdaterad den 26 januari 1998 eller senare.