Heltalstrianglar med rationell parametrisering.

Jockum Aniansson

En plan triangel T med sidorna a , b , c och vinkelsumma 180^o kan säkert parametriseras på många olika sätt. Här tager vi sikte på att använda den omskrivna cirkelns radie R ("omradien", eng. *circumradius*) i parametriseringen, eftersom sinussatsen ger

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \ .$$

Vi inför de klassiska substitutionerna

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \ , \quad \text{där} \quad t = \tan\frac{\alpha}{2} \ , \quad \text{och} \quad \sin\beta = \frac{2\tau}{1+\tau^2} \ , \quad \text{där} \quad \tau = \tan\frac{\beta}{2} \ .$$

Vi observerar att både t och τ är positiva reella tal.

För triangelsidan $c = 2R\sin\gamma = 2R\sin(\alpha+\beta)$ får vi då efter omarbetning uttrycket

$$c = 4R \cdot \frac{(t+\tau)\,(1-t\tau)}{(1+t^2)\,(1+\tau^2)} \ .$$

Vi homogeniserar dessa uttryck genom att skriva

$$t = \frac{v}{u} \quad \text{och} \quad \tau = \frac{y}{x}$$

där (vi *skulle kunna* låta v vara $\sin(\alpha/2)$, och u $\cos(\alpha/2)$, osv, men) vi siktar på fallen då u, v, x och y alla är positiva heltal.

Vi inför den gemensamma faktorn

$$q = \frac{2R}{(u^2+v^2)\,(x^2+y^2)}$$

och kan nu skriva

$$a = 2R \cdot \frac{2uv}{u^2+v^2} = q \cdot 2uv \cdot (x^2+y^2) \quad ,$$

$$b = 2R \cdot \frac{2xy}{x^2+y^2} = q \cdot 2xy \cdot (u^2+v^2) \quad ,$$

$$c = q \cdot 2\,(vx+uy) \cdot (ux-vy) \quad .$$

Eftersom vinkeln γ är positiv, så måste parentesen $(ux - vy)$ vara positiv. Detta motsvarar att $0 \ < \ t\,\tau \ < \ 1$.

Medelst cosinussatsen får vi slutsats nummer (1) nedan. Formeln

$$t = \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

och samma för τ ger oss nu (2) nedan. Uttrycket för q ger oss slutligen (3).

Slutsatser. (1) Om sidorna a, b och c är rationella, blir $\cos\alpha$, $\cos\beta$ och $\cos\gamma$ alla rationella, men inget kan sägas om $\sin\alpha$, $\sin\beta$ eller $\sin\gamma$, och parametrarna t och τ behöver **ej** vara rationella.
(2) Om sidorna a, b, c samt omradien R alla fyra är rationella, blir både sin och cos av α, β och γ rationella, och därmed blir automatiskt parametrarna t och τ rationella!
(3) Om a, b, c och R alla fyra är heltal, kan vi parametrisera triangeln med positiva heltal u, v, x och y samt en rationell faktor q.

Nu kan vi räkna ut t ex
perimetern (omkretsen) p,
semiperimetern $s = p/2$,
den inskrivna cirkelns radie r ("inradien", eng. *inradius*),
höjden h mot sidan c, samt
arean $|T|$,
alla uttryckta med våra fem parametrar:

$$p = q \cdot 4\,u\,x\,(vx+uy) \quad ,$$

$$r = q \cdot 2\,v\,y\,(ux-vy) \quad ,$$

$$h = q \cdot 4\,u\,v\,x\,y \quad ,$$

$$|T| = q^2 \cdot 4\,u\,v\,x\,y\,(vx+uy)\,(ux-vy) \quad .$$

Mer kan sägas, som t ex att

$$t = R \cdot \frac{a^2-(b-c)^2}{a\,b\,c} \quad \text{och} \quad \tau = R \cdot \frac{b^2-(a-c)^2}{a\,b\,c} \quad .$$

Fortsättning kan följa.

$20\frac{21}{3}20$