ENM 7.16
Randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - (2 - 2x + x^2)y' + y = 0, \\ y(1) = 0, \quad y(2) = 1 \end{cases}$$

är givet. Skriv ett program som beräknar och ritar lösnings-
kurvan $y(x)$.

Dessutom: beräkna värdet av $y'(1)$ och integralvärdet $\int_1^2 y(x)\,\mathrm{d}x$.
Gör tillförlitlighetsbedömning av resultaten.

Sammanfattning av finita differensmetoden

1. Diskretisera intervallet, $y_k \approx y(x_k)$
2. Approximera alla derivator med finita differenser
3. Sätt in approximationerna i diffekvationen
4. Sortera på index k
5. Tänk på randvillkoren
6. Skriv på matrisform $A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$
   (linjär diffekvation $\Longrightarrow$ linjärt system)

ENM 7.15

En katalysator består av ett stort antal porösa sfäriska partiklar. För varje partikel kan koncentrationen av det ämne som katalyseras beskrivas med följande differentialekvation

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \quad \text{där} \quad g(y) = y\mathrm{e}^{4(1-y)/(1+0.2(1-y))}.$$

Vidare gäller $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ vid $x = 0$ samt $y(1) = 1$. Förutom lösningen $y(x)$ är man intresserad av att beräkna ett effektivitetsmått för processen: $\eta = 3y'(1)$. Formulera en algoritm för lösning av katalysatorproblemet.

Vid $x = 0$ får man problem med att termen $\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ blir av formen $0/0$. Visa med hjälp av l'Hôpitals regel följande: för $x = 0$ övergår differentialekvationen till $3\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = g(y)$. Utnyttja detta i den numeriska behandlingen av problemet.

Sammanfattning av inskjutningsmetoden

- Lös begynnelsevärdesproblem istället för randvärdesproblem
  (skriv om som system ifall det behövs)
- Vi saknar begynnelsevärden! Gissa vad de borde vara.
  (alla villkor är nu vid ena randen – "startvärden")
- Se hur väl lösningen uppfyller de randvillkor vi bortsett från ("slutvärden")
- Detta är ett ekvationslösningsproblem $F(a) = 0$
  (a är gissade startvärden, $F(a)$ felet i slutvärdena)
  Lös med sekantmetoden eller fzero

(Ett sätt att hitta startgissningar på a till sekantmetoden eller fzero är att plotta funktionen $F(a)$ för många olika värden på a ...)