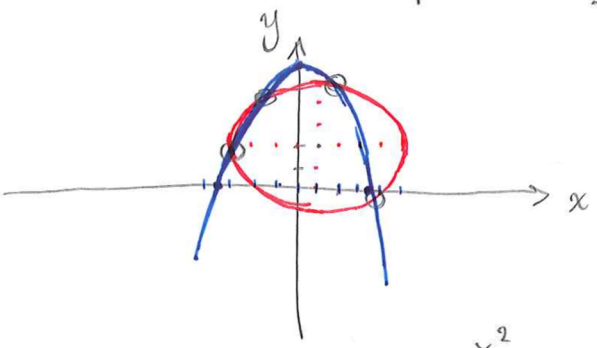
Tenta 17-01-12 del 2

P1.

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1 & (1) \\[2ex] \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y}{2} = 3 & (2) \end{cases}$$

a) Hur många lösningar?

(1) är en ellips. $\dfrac{(x-1)^2}{4^2} + \dfrac{(y-2)^2}{3^2} = 1$



(2) är en parabel. $y = -\dfrac{x^2}{2} + 6 = \dfrac{12 - x^2}{2} = \dfrac{(\sqrt{12}+x)(\sqrt{12}-x)}{2}$

Svar: 4 st.

$\sqrt{12} \approx 3{,}5$

$y_{max} = y(0) = 6$

b) Sekantmetoden. Kräver envariabelekvation.

Enklast: sätt in $y = \dfrac{3-x^2}{2}$ i (1):

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{\left(\frac{3-x^2}{2} - 2\right)^2}{9} - 1}_{f(x)} = 0 \qquad \boxed{f(x) = 0}$$

c) $$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \underbrace{\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}_{\approx \frac{1}{f'(x_n)}}$$

I Matlab:

```
f = @(x) (x-1)^2/16 + ((3-x^2)/2 - 2)^2/9 - 1;
t = 1;  x = -2;  xold = -2.1;
while abs(t) >= 1e-7,   t = f(x)*(x-xold)/(f(x) - f(xold)); xold = x;
    x = x - t;
end, x
```

P2.

t	0.0	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0	12.0
y	1.4	0.6	1.1	1.2	1.6	1.3	1.0

$$\frac{y}{y_0} = 1 + a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

a) $\omega = 2$, $y_0 = 1$. MKV.

Systemet blir

$$\begin{cases} 1.4 = 1 + \underline{a}\cos(2\cdot 0) + \underline{b}\sin(2\cdot 0) \\ 0.6 = 1 + \underline{a}\cos(2\cdot 2) + \underline{b}\sin(2\cdot 2) \\ 1.1 = \quad \vdots \\ 1.2 = \\ 1.6 = \\ 1.3 = \\ 1.0 = 1 + \underline{a}\cos(2\cdot 12) + \underline{b}\sin(2\cdot 12) \end{cases}$$

2 obekanta, 7 ekv.

Matrisform:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1.4-1 \\ 0.6-1 \\ 1.1-1 \\ \vdots \\ 1.0-1 \end{bmatrix} \quad (y\text{-värden}) - 1$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\cdot 0) & \sin(2\cdot 0) \\ \cos(2\cdot 2) & \sin(2\cdot 2) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(2\cdot 12) & \sin(2\cdot 12) \end{bmatrix} \leftarrow 7\times 2$$

Normalekvationerna: $\underbrace{A^T A}_{2\times 2}\bar{x} = \underbrace{A^T \bar{b}}_{2\times 1}$

2 ekv., 2 obekanta.

b) $w = 2$.

Linjärt ersättningsproblem. T.ex.

$$-1 = -\frac{y}{y_0} + a\cos(wt) + b\sin(wt)$$

$\boxed{\frac{1}{y_0} = c}$ ger

$$-\underline{c}\,y + \underline{a}\cos(wt) + \underline{b}\sin(wt) = -1$$

eller

$$y = \underline{y_0} + \underbrace{a y_0}_{\underline{a}}\cos() + \underbrace{b y_0}_{\underline{b}}\sin()$$

Matlab:

```
t=(0:2:12)';
y=[1.4 0.6 1.1 1.2 1.6 1.3 1.0]';
% Skriv inte ... i onödan i koden.
% Exakt syntax inte så viktig. Det är själva
% strukturen & algoritmen som är viktig.
hogerled = y;      w=2;
matris = [ones(size(t)), cos(w*t), sin(w*t)];
coeff = matris \ hogerled; % gör MKV.
y0 = coeff(1);
a = coeff(2)/y0;   b = coeff(3)/y0;
y0, a, b
```

(P2)

c) Icke linjära MKV.

$$f_i(y_0, a, b, \omega) = \frac{y_i}{y_0} - 1 - a\cos(\omega t_i) - b\sin(\omega t_i) = 0 \quad i = 1, \dots, 7$$

Jacobimatris (Gauss-Newton):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial y_0} = -\dfrac{y_i}{y_0^2} \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial a} = -\cos(\omega t_i) \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial b} = -\sin(\omega t_i) \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial w} = a\sin(\omega t_i)t_i - b\cos(\omega t_i)\, t_i \end{cases}$$

Matlab:

Fortsättning från förra uppgiften!

```
x = [y0, a, b, w]';
f = @(x) y/x(1) - 1 - x(2) * cos(x(4)*t) - x(3) * sin(x(4)*t);
J = @(x) [-y/x(1)^2, -cos(x(4)*t), -sin(x(4)*t), ...
          x(2) * sin(x(4)*t).*t - x(3) * cos(x(4)*t).*t];
t = 1;
while norm(t) >= 1e-7
    t = J(x) \ f(x);
    x = x - t;
end
% Plot
tf = linspace(0, 12, 100);
yf = x(1) * (1 + x(2) * cos(x(4)*tf) + x(3) * sin(x(4)*tf));
plot(tf, yf), hold on, plot(tf, yf, 'x')
```

P3.

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} + y - \dfrac{dx}{dt} = t^2 & y(1) = 1 \\ (2) \quad \dfrac{dy}{dt} - xy + \dfrac{d^3x}{dt^3} = t & x(1) = 2 \end{cases}$$

a) Om vi skriver om som system av första ordningen måste vi införa

$$\begin{cases} u_1 = x \\ u_2 = x' \\ u_3 = x'' \\ u_4 = y \\ u_5 = y' \end{cases}$$

Så $\underline{5}$ BV behövs.

$x'(1)$, $x''(1)$, $y'(1)$ saknas

b)

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = t - u_5 + u_1 u_4 \\ u_4' = u_5 \\ u_5' = t^2 - u_4 + u_2 \end{cases} \qquad \bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

c) $\boxed{\text{Matlab}}$ ⟵ Se nästa sida!

d) Kan använda trapz. (nästa sida!)

(P3)

Kod:

```
u0 = [2, 0.2, 0.2, 1, 0.2]';   tspan = [1 3];
[T,U]=ode45(odefun, tspan, u0);
```

matris där varje rad är en tidpunkt

vektor med alla tidpunkter

```
disp(['y(3) är ', num2str(U(end, 4))])
w = U(:, 5)./U(:, 4);
plot(T, w)
```

```
I = trapz(T, U(:, 4));
disp(['Integralen är ', num2str(I)])
```

P4. $$y'''(x) \approx \frac{c_1 y(x-2h) + c_2 y(x-h) + c_3 y(x) + c_4 y(x+h) + c_5 y(x+2h)}{c_6 h^3}$$

a) $c_1 = c_5 = 1, \quad c_2 = c_4 = -2, \quad c_3 = 0$

$c_6 = 6$

Taylorutveckla y kring x:

$$y(x-2h) = y(x) - 2h\,y'(x) + \frac{4h^2}{2!}y''(x) - \frac{8h^3}{3!}y'''(x) + \frac{16h^4}{4!}y^{(4)}(x)$$
$$y(x-h) = y(x) - h\,y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x)$$
$$y(x+h) = y(x) + h\,y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x)$$
$$y(x+2h) = y(x) + 2h\,y'(x) + \frac{4h^2}{2!}y''(x) + \frac{8h^3}{3!}y'''(x) + \frac{16h^4}{4!}y^{(4)}(x)$$

Måste vara fel på uppgiften! $y(x)$ försvinner inte!

→ Konvergerar inte alls! Ingen noggrannhetsordning.

Med $c_1 = -c_5$ och $c_2 = -c_4$ fås bättre resultat. Men blir det verkligen rätt uppskattning med $c_6 = 6$? Kanske blir så, men dumt att summa är "noll" på a)...