

Övning 7

- **Tenta 16/1 2015**

- Del 1: 10 uppgifter
- Del 2: 3 uppgifter

Tentan med lösningar:

https://www.math.kth.se/na/SF1544/numf16/tentor_lista1.html

Del 1

- 10 uppgifter, totalt 20 poäng
- 14 poäng (inklusive bonuspoäng) ger betyg E
- Om kontrollskrivningen är godkänd behöver del 1 ej göras
- Inga hjälpmedel är tillåtna

Del 1, uppgift 1. (2p)

Fixpunktsiterationerna

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

med startpunkten $x_0 = 1$ konvergerar mot

☐ 1/2

☐ $\sqrt{2}$

☐ 1/3

☒ 2

☐ 1/4

☐ 3

☐ $1/\sqrt{2}$

☐ iterationerna konvergerar ej

Del 1, uppgift 2. (2p)

Den asymptotiska konvergensfarten för fixpunktsiterationen (1) är

☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/2$

☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $-1/2$

☒ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/4$

☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/3$

☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/\sqrt{2}$

☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/\sqrt{3}$

☐ kvadratisk

☐ metoden konvergerar ej

Del 1, uppgift 3. (3p)

Modellen $y = ax + b$ anpassad i minstakvadratmening till mätvärdena

x	1	2	3
y	0	2	4

ger b lika med

☒ -2

☐ -0.7

☐ -1.7

☐ -0.3

☐ -1.3

☐ 2

☐ -1

☐ något annat

Del 1, uppgift 4. (3p)

En iteration med Newtons metod för att lösa systemet

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$x^2 - y = 0,$$

med startgissningen $x = 1/2$ och $y = 1/2$ ger

☐ $(x, y) = (1/2, 3/8)$

☒ $(x, y) = (7/8, 5/8)$

☐ $(x, y) = (1/4, 3/8)$

☐ $(x, y) = (7/8, 3/8)$

☐ $(x, y) = (-1/2, 3/8)$

☐ $(x, y) = (1/2, 1)$

☐ $(x, y) = (1/2, -3/8)$

☐ något annat

Del 1, uppgift 5. (2p)

Trapetsmetoden med två lika stora intervall ger integralen $\int_{-1}^1 x^2 dx$ approximationen

☐ $-1/2$

☐ $3/2$

☐ 0

☐ 2

☐ $1/2$

☐ $5/2$

☒ 1

☐ något annat

Del 1, uppgift 6. (1p)

Antag att matrisen A med dimensionen $n \times n$ har normen

$$\|A\|_{\infty} = \max_{y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0} \frac{\|Ay\|_{\infty}}{\|y\|_{\infty}} = 10^4$$

där $\|y\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i|$. Dessutom gäller $\|A^{-1}\|_{\infty} = 10^3$. Om $x \in \mathbb{R}^n$ löser det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ och $x + \Delta x$ löser samma system med en störning i högerledet, $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, där $\|\Delta b\|_{\infty} / \|b\|_{\infty} = 10^{-16}$, hur stort kan det relativa felet i lösningen, $\|\Delta x\|_{\infty} / \|x\|_{\infty}$, maximalt vara?

☐ 10^{-7}

☐ 10^{-11}

☐ 10^{-8}

☐ 10^{-12}

☒ 10^{-9}

☐ 10^{-16}

☐ 10^{-10}

☐ något annat

Del 1, uppgift 7. (1p)

En vektor $x \in \mathbb{R}^3$ har norm $\|x\|_\infty = 2$. Om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

hur stort kan då $\|Ax\|_\infty$ maximalt vara?

☐ 9

☐ 24

☐ 10

☐ 36

☐ 12

☒ 48

☐ 18

☐ något annat

Del 1, uppgift 8. (2p)

Med hjälp av tabellen

t	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(t)$	3.0042	3.3201	3.6693	4.0552

kan derivatan $f'(1.2)$ approximeras. Välj det alternativ nedan som ger bäst approximation.

☐

0.21

☐

5.6

☐

0.45

☐

7.1

☐

1.3

☐

10.4

☒

3.3

Del 1, uppgift 9. (2p)

Funktionen $y(t)$ löser begynnelsevärdesproblemet

$$y''(t) = \frac{1}{1 + y(t)}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Ett steg med Eulermetoden ger $y(0.1)$ det approximativa värdet

☐ 0.8

☒ 1.1

☐ 0.9

☐ 1.2

☐ 1.0

☐ 1.25

☐ 1.05

☐ något annat

Del 1, uppgift 10. (2p)

Matrisen A har egenvärdena 1, 2, 3 och 4. Potensmetoden (engelska: Power Method)

```
function [lam,u]=powerit(A,x,k)
for j=1:k
    u=x/norm(x);
    x=A*u;
    lam=u'*x;
end
u=x/norm(x);
end
```

ger för nästan alla startvärden en approximation av ett av egenvärdena (och tillhörande egenvektor). Vilket?



4



1



2



3

Del 2

- 3 uppgifter, totalt 50 poäng
- $10p \rightarrow D$, $20p \rightarrow C$, $30p \rightarrow B$, $40p \rightarrow A$
- Inga hjälpmedel är tillåtna

Del 2, uppgift 1.

1a. (5p) Formulera en finit differensapproximation av temperaturen $u(x)$ i positionen $x \in [0, 1]$ i en stav, som uppfyller värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx}(x) \right) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

där $f(x) = x$ är en given källfunktion och $k(x) = 1 + x$ är en given konduktivitetsfunktion.

1b. (5p) Skriv ett Matlab-program för att lösa problemet i uppgift 1a.

1c. (5p) Byt konduktiviteten $k(x) = 1 + x$ mot den temperaturberoende konduktiviteten $k(x, u(x)) = 1 + u(x)/10$. Formulera en numerisk metod för detta icke linjära problem (Matlab-program behöver inte skrivas).

Del 2, uppgift 2.

2a. (4p) Formulera en Monte Carlo-metod för att approximera integralen

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

och skriv ett Matlabprogram som utför approximationen numeriskt.

2b. (5p) Formulera Monte Carlo-metoden för att approximera

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{e^{x_1^2} + e^{x_2^2} + e^{x_3^2}} \quad (2)$$

och skriv ett Matlabprogram som utför approximationen numeriskt.

2c. (2p) Anta att det räcker med 1000 funktionsevalueringar i Monte Carlo-metoden för att ge ett förväntat fel av storleksordningen 0.1. Hur många funktionsevalueringar behövs ungefär för att ge ett förväntat fel av storlek 10^{-3} ?

2d. (4p) Formulera en numerisk metod för att approximera integralen (2) som inte bygger på Monte Carlo-metoden. Antag att 10^4 funktionsevalueringar räcker för att få beräkningsfelet av storlek 0.1. Hur många funktionsevalueringar behövs ungefär för att få felet 10^{-3} ?

2e. (5p) Monte Carlo-metoden har en fördel jämfört med vanlig kvadratur vid integralberäkningar i hög dimension. Motivera matematiskt varför Monte Carlo-metoden också har en fördel när integranden inte är deriverbar.

Del 2, uppgift 3.

Vinkelutslaget $x(t)$ vid tiden t för en pendel med längden L uppfyller

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin x(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$$

där g är gravitationskonstanten.

3a. (5p) Formulera Eulermetoden för att numeriskt bestämma en approximation till $x(t)$.

3b. (5p) Skriv ett Matlabprogram för Eulermetoden i uppgift 3a som bestämmer en approximation i tidsintervallet $[0, b]$, $b > 0$.

3c. (5p) Modifiera programmet i uppgift 3b så att en approximation av periodtiden skrivs ut. Periodtiden T definieras av $x(t + T) = x(t)$, för alla t .

Del 2, alternativ uppgift 3. (15p)

Formulera och bevisa en sats som relaterar det globala och lokala felet för approximation av ordinära differentialekvationer med Eulers metod.