

ENM 7.16

Randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - (2 - 2x + x^2)y' + y = 0, \\ y(1) = 0, \quad y(2) = 1 \end{cases}$$

är givet. Skriv ett program som beräknar och ritar lösningskurvan $y(x)$.

Dessutom: beräkna värdet av $y'(1)$ och integralvärdet $\int_1^2 y(x) dx$. Gör tillförlitlighetsbedömning av resultaten.

ENM 7.15

En katalysator består av ett stort antal porösa sfäriska partiklar. För varje partikel kan koncentrationen av det ämne som katalyseras beskrivas med följande differentialekvation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = g(y) \quad \text{där} \quad g(y) = y e^{4(1-y)/(1+0.2(1-y))}$$

Vidare gäller $dy/dx = 0$ vid $x = 0$ samt $y(1) = 1$. Förutom lösningen $y(x)$ är man intresserad av att beräkna ett effektivitetsmått för processen: $\eta = 3 y'(1)$. Formulera en algoritm för lösning av katalysatorproblemet.

Vid $x=0$ får man problem med att termen $\frac{2}{x} \frac{dy}{dx}$ blir av formen $0/0$. Visa med hjälp av l'Hospitals regel följande: för $x=0$ övergår differentialekvationen till $3 d^2y/dx^2 = g(y)$. Utnyttja detta i den numeriska behandlingen av problemet.

ENM 7.12 (valfritt)

Lösningsskurvan $y(x)$ till differentialekvationen $y'' - 3yy'/(1+x^2) = -2y^2$, med startvärdena $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, är i intervallet $0 \leq x \leq 1.6$ genererande konturkurva till en rotationssymmetrisk figur. Mantelytan bestäms av integralen $2\pi \int_0^{1.6} y \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$.

Skriv begynnelsevärdesproblemet på standardform och utöka det med en ekvation som svarar mot integralen. Beräkna och rita upp konturkurvan och skriv ut värdet på rotationsytan.

Ledning: Integralen $w(x) = \int_a^x g(t)dt$ kan beräknas som lösningen till differentialekvationen $dw/dx = g(x)$, $w(a) = 0$.