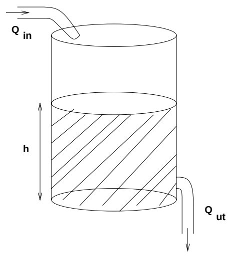
ENM 7.4

För vätskenivån h i en behållare med tvärsnittsarean A, inflödet Q_{in} och utflödet Q_{ut} gäller $dh/dt = (Q_{in} - Q_{ut})/A$. Vi antar att utflödet endast bestäms av tyngdkraften och munstyckets utseende.
Bernoullis lag ger oss då $Q_{ut} = C\sqrt{2gh}$, där C är en konstant som endast beror av munstycket och g är tyngdaccelerationen. $Q_{in} = 1-h/20$ då $0 \le h \le 20$ och är noll för övrigt. Beräkna och rita upp vätskenivån som funktion av tiden från $t=0$ och så länge något intressant händer. Låt $A=0.8$, $C=0.1$, $g=9.81$ (enheter är meter och sekund). Rita i en gemensam figur lösningarna för $h(0)=0$, $h(0)=3$ och $h(0)=10$. Bestäm jämviktsläget i tanken genom att lösa ekvationen som erhålls då $dh/dt=0$.



ENM 7.5 (valfritt)

Mitt på Stora gården (numera kallad borggården) på KTH finns skulptören Ivar Johnssons fontän *Flicka på delfin* (Adastatyn). När den är i funktion sprutar en vattenstråle snett uppåt men tvingas sedan av Newtons rörelseekvationer ner i plaskdammen. Låt u betyda hastighetens horisontella komponent och låt φ beteckna vinkeln mellan vertikalen och kurvbanan. Då gäller vid luftmotståndet k differentialekvationen $du/d\varphi = -k\,u^3/\sin^3\varphi$.
Det gäller att bestämma hastigheten i toppunkten, alltså vid $\varphi = \pi/2$, när utgångshastighet och luftmotstånd är kända.

Gör för hand en beräkning med Runge-Kuttas metod från $\varphi = \pi/6$ till $\varphi = \pi/2$ med maximalt steg. Använd för enkelhets skull $k=\frac{3}{4\pi}$ och startvärdet $u = 1$. (Sätt inte in värden på π och $\sqrt{3}$ förrän på slutet.)

Skriv ett MATLAB-program som med Runge-Kuttas metod och finare indelning av φ-intervallet beräknar hastigheten i toppunkten.

(Gör uppgiften med Framåt Euler istället för Runge-Kuttas metod. Det kommer behövas mycket fler steg, men svaret blir i slutändan detsamma – se lösningsförslag i exempelsamlingen.)

ENM 7.11

En fallskärmshoppare hoppar från en ballong från höjden H (mätt i meter) och faller till att börja med i fritt fall. Hopparens höjdläge $h(t)$ vid tiden t (sekunder) ges av följande differentialekvation:

$$m\,\frac{d^2h}{dt^2} = k\,(\frac{dh}{dt})^2 - m\,g, \quad h(0)=H, \quad \frac{dh}{dt}(0)=0,$$

där k är en luftmotståndskoefficient, m är hopparens massa (kg) och $g=9.81$ är tyngdaccelerationen. Sluthastigheten v_f vid fritt fall är cirka 50 m/s och sluthastigheten v_s vid fall med den aktuella fallskärmen är cirka 5 m/s. Efter 30 sekunder vecklas fallskärmen ut. Skriv en algoritm som för $H=2000$ och $m=75$ beräknar och ritar kurvan över hopparens höjdläge som funktion av tiden från uthoppet till nedslaget och dessutom besvarar följande frågor: Hur högt befinner sig hopparen då fallskärmen utvecklas? När slår han i marken och vilken hastighet har han då? Diskutera hur man förfar för att bedöma noggrannheten i de erhållna värdena.