ÖVNING 7 - DIFF & TRANS 030509

HANNES REIJNER

10.3.13. Hitta kritiska punkterna till det nedan givna plana autonoma systemet och klassifisera varje kritisk punkt som stabil nod, stabil spiralpunkt, instabil spiralpunkt, instabil nod eller sadelpunkt.

$$x' = y - x^2 + 2$$
$$y' = x^2 - xy$$

lösning Vi börjar med att hitta de kritiska punkterna. Vi låter $y' = x^2 - xy = x(x-y) = 0$ och ser att detta är ekvivalent med att $x = 0$ eller att $x = y$. Vi låter nu $x' = y - x^2 + 2 = 0$ vilket om $x = 0$ är ekvivalent med att $y = -2$ och om $x = y$ är ekvivalen med att $y - y^2 + 2 = 0$ vilket ger oss att $y = -1$ eller att $y = 2$. Vi har därmed att de kritiska punkterna är $(0, -2)$, $(-1, -1)$ och $(2, 2)$.

Ett ekvationssytem $X' = g(X)$ kan approximeras av $X' = g'(X_1)(X - X_1)$ i närheten av en kritisk punkt X_1 vilket om vi låter $H = X - X_1$ kan skrivas som $H' = g'(X_1)H$. Vi ser att vi kan studera matrisen $g'(X_1)$, vilken kallas Jacobianen, för att se hur system beter sig i närheten av en kritisk punkt X_1. I vårt fall har vi att

$$g'(X) = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 2x-y & -x \end{pmatrix}$$

och vi studerar matrisen $g'(X)$ för de olika kritiska punkterna.

Vi börjar med $(0, -2)$ och får att $g'\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vi får att $\Delta = -2$ och därmed att $(0, -2)$ är en sadelpunkt.

Vi fortsätter med $(-1, -1)$ och får att $g'\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vi får att $\Delta = 3$, $\tau = 3$ samt att $\tau^2 - 4\Delta = -3$. Det följer därmed att $(-1, -1)$ är en instabil spiralpunkt.

Vi avslutar med $(2, 2)$ och får att $g'\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Vi får att $\Delta = 6$, $\tau = -6$ samt att $\tau^2 - 4\Delta = 0$. Det följer därmed att $(2, 2)$ är en stabil punkt men att vi inte kan säga om det är en nod, spiral eller degenererad punkt.

E-mail address: `hannes@math.kth.se`
URL: `www.math.kth.se/~hannes`