

ÖVNING 7 - DISKRET MATEMATIK 030404

HANNES REIJNER

12.2.1 Låt $X = \{1, 2, 5, 6, 7, 9, 11\}$ och definiera $x \sim y$ till att betyda att $x - y$ är delbart med 5. Verifiera att $\sim$ är en ekvivalensrelation och beskriv partitioneringen av X i ekvivalensklasser.

lösning. För att visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation måste vi visa att relationen $\sim$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Vi visar i tre steg.

- (1) Vi visar att $x \sim x$, det vill säga att $\sim$ är reflexiv: Eftersom $x - x = 0$ och 5 delar 0 så har vi att $\sim$ är reflexiv.
- (2) Vi visar att om $x \sim y$ så följer att $y \sim x$, det vill säga $\sim$ är symmetrisk: Om 5 delar $x - y$ så följer att 5 delar $-(x - y) = y - x$ och därmed är $\sim$ symmetrisk.
- (3) Vi visar att om $x \sim y$ och $y \sim z$ så följer att $x \sim z$, det vill säga $\sim$ är transitiv: Om 5 delar $x - y$ och 5 delar $y - z$ så finns det heltal n och m så att $5n = x - y$ och $5m = y - z$. Vi får nu att $5(n + m) = x - z$ och därmed att 5 delar $x - z$ vilket ger oss att $\sim$ är transitiv.

Vi beskriver nu ekvivalensklasserna, det vill säga partitioneringen av X . Vi väljer ett godtyckligt element tillhörande X till exempel 1 och undersöker vilka övriga element $x \in X$ som tillhör samma ekvivalensklass som 1. Vi ser enkelt att de enda $x \in X$ som uppfyller att $5 \mid (1 - x)$ är $x = 6$ och $x = 11$ (och $x = 1$ förstås). Vi har därmed att en ekvivalensklass utgörs av $\{1, 6, 11\}$. Vi väljer nu ett element $x \in X$ som inte ligger i denna ekvivalensklass, till exempel $x = 2$ och undersöker på samma sätt vilka element som ligger i samma ekvivalensklass som 2. Vi ser enkelt att det enda $x \in X$ som uppfyller att $5 \mid (2 - x)$ är $x = 7$ (och $x = 2$ förstås). Vi har därmed att en ekvivalensklass utgörs av $\{2, 7\}$. Vi upprepar samma procedur för de övriga element och får att ekvivalensklasserna utgörs av $\{1, 6, 11\}$, $\{2, 7\}$, $\{5\}$ och $\{9\}$.

E-mail address: hannes@math.kth.se

URL: <http://www.math.kth.se/~hannes>