

ÖVNING 5 - DISKRET MATEMATIK 030328

HANNES REIJNER

11.2.3 Antag att uttrycket $(x + y + z)^n$ är utvecklat och att termerna är samlade enligt vanliga algebraiska regler exempelvis

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

Hur många termer finns i den resulterande formeln?

lösning. Vi betraktar uttrycket $(x + y + z)^n = (x + y + z)(x + y + z) \dots (x + y + z)$ och observerar att polynomet är homogent av grad n . Det betyder att det för alla termer gäller att summan av potenserna är n . Vi har alltså att det för en term $mx^a y^b z^c$, där m är ett naturligt tal, alltid gäller att $a + b + c = n$. Vi observerar också att det kommer att finnas termer $mx^a y^b z^c$ för alla möjliga kombinationer av icke-negativa heltal a, b och c så att $a + b + c = n$. För att få reda på antalet termer kan vi därför se processen som att vi bland de 3 termerna x, y och z väljer n stycken där vi tillåter repetition (vi har ju i exemplet ovan att x^2 förekommer som term) och inte tar hänsyn till ordningen i vilka de kommer (vi har ju i exemplet ovan att $xy = yx$). Vi har alltså att antalet termer ges som $\binom{3+n-1}{n} = \binom{2+n}{n} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)!}{2!((n+2)-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. Här är det viktigt att observera att vi väjer n stycken bland 3 och inte tvärt om! Till sist en extra kommentar. Om vi har ett uttryck $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ så får vi motsvarande $\binom{n+m-1}{n}$ termer, testa själv!

11.1.7-8 (något modifierade) Visa att

$$\binom{s-1}{0} + \binom{s}{1} + \dots + \binom{s+n-2}{n-1} + \binom{s+n-1}{n} = \binom{s+n}{n}$$

där s och n är naturliga tal på 3 olika sätt:

(a) genom att använda Pascal's identitet

$$\binom{m}{r} = \binom{m-1}{r} + \binom{m-1}{r-1}$$

(sats 11.1.1 eller 4.1.1 i gamla boken) och induktion.

(b) genom att använda Pasqal's identitet med $m = s + n$ och $r = n$, $\binom{s+n}{n} = \binom{s+n-1}{n} + \binom{s+n-1}{n-1}$ och använda pasqal's identitet om och om igen för att dela upp sista termen.

(c) genom ett rent kombinatoriskt resonemang.

lösning a). Vi konstaterar att $\binom{s-1}{0} + \binom{s}{1} + \dots + \binom{s+n-2}{n-1} + \binom{s+n-1}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{s+i-1}{i}$ och visar med hjälp av induktion. Vi låter $n = 1$ och ser att $\sum_{i=0}^1 \binom{s+i-1}{i} = \binom{s-1}{0} + \binom{s}{1} = 1 + s = \binom{s+1}{1}$ och har därmed ett induktionsbassteg. Vi antar nu att påståendet är sant för $n = k$, det vill säga att $\sum_{i=0}^k \binom{s+i-1}{i} = \binom{s+k}{k}$, vilket alltså utgör vårt induktionsantagande. Vi undersöker nu fallet $n = k+1$ och får att $\sum_{i=0}^{k+1} \binom{s+i-1}{i} = \left(\sum_{i=0}^k \binom{s+i-1}{i}\right) + \binom{s+(k+1)-1}{k+1} = \{ \text{använd induktionsantagandet} \} = \binom{s+k}{k} + \binom{s+(k+1)-1}{k+1} = \binom{s+(k+1)-1}{(k+1)-1} + \binom{s+(k+1)-1}{k+1} = \{ \text{Låt } m = s + k + 1 \text{ och } r = k + 1 \text{ i Pascal's identitet} \} = \binom{s+k+1}{k+1}$. Vi har alltså visat att om påståendet gäller för $n = k$ så gäller det också för $n = k + 1$ och har visat att påståendet är sant för $n = 1$. Därmed följer det att $\binom{s-1}{0} + \binom{s}{1} + \dots + \binom{s+n-2}{n-1} + \binom{s+n-1}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{s+i-1}{i} = \binom{s+n}{n}$, för alla naturliga tal n och s , vilket skule bevisas.

lösning b). Vi har att $\binom{s+n}{n} = \binom{s+n-1}{n} + \binom{s+n-1}{n-1}$. Vidare har vi enligt Pascal's identitet att $\binom{s+n-i}{n-i} = \binom{s+n-i-1}{n-i} + \binom{s+n-i-1}{n-i-1}$ och vilket för $i = 1$ ger oss att $\binom{s+n}{n} = \binom{s+n-1}{n} + \binom{s+n-1}{n-1} + \binom{s+n-2}{n-2}$. Vi utför samma operation för $i = 2, 3, \dots, n-2$ och får då att

$$\binom{s+n}{n} = \binom{s+n-1}{n} + \binom{s+n-2}{n-1} + \dots + \binom{s+1}{2} + \binom{s+1}{1}$$

Vi observerar att $\binom{s+1}{1} = \binom{s}{1} + \binom{s}{0}$ och eftersom $\binom{s}{0} = 1 = \binom{s-1}{0}$ att $\binom{s+1}{1} = \binom{s}{1} + \binom{s-1}{0}$ vilket ger oss att

$$\binom{s+n}{n} = \binom{s+n-1}{n} + \binom{s+n-2}{n-1} + \dots + \binom{s+1}{2} + \binom{s}{1} + \binom{s-1}{0}$$

vilket skulle bevisas.

lösning c). Vi har en $(s+n)$ -delmängd $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{s+n}\}$ och M vara mängden av alla n -delmängder till X . Vi har alltså att $|M| = \binom{s+n}{n}$. Vi väljer nu en n -delmängd $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ till X . Vidare låter vi M_i vara mängden av alla n delmängder som innehåller $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$, men inte y_i , för $i = 1, 2, \dots, n$. Till sist låter vi M_{n+1} vara mängden av n -delmängder till X som innehåller $y_1, y_2, \dots, y_n$ (Självfallet innehåller M_{n+1} bara 1 n -delmängd, nämligen Y). Vi ser nu att $M = \cup_{i=1}^{n+1} M_i$ och att $\cap_{i=1}^{n+1} M_i = \emptyset$ och har därför att $|M| = \sum_{i=1}^{n+1} |M_i|$. Vidare observerar vi att det för en n -delmängd A tillhörande M_i gäller att $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$ tillhör A , men att y_i inte tillhör A . Vi har därför att de resterande $n - (i - 1)$ elementen i A kan väljas utan repetition bland ur mängden $X \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$. Eftersom $|X \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_r\}| = s + n - i$, valet är oberoende av ordning, men utan repetition kan det göras på $\binom{s+n-i}{n-(i-1)} = \binom{s+n-i}{n-i+1}$ sätt. Till sist ser vi enkelt att det för specialfallet $i = n + 1$ gäller att $\binom{s-1}{0} = 1$ och kan

därför låta $|M_{n+1}| = \binom{s-1}{0} = 1$. Vi summerar nu och får att

$$\begin{aligned}\binom{s+n}{n} &= |M| = \sum_{i=1}^{n+1} |M_i| = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{s+n-i}{n-i+1} = \\ &= \binom{s+n-1}{n} + \binom{s+n-2}{n-1} + \cdots + \binom{s+1}{2} + \binom{s}{1} + \binom{s-1}{0}\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.

E-mail address: `hannes@math.kth.se`

URL: `http://www.math.kth.se/~hannes`