

ÖVNING 2 - DISKRET MATEMATIK 030319

HANNES REIJNER

8.3.1 Hitta representationerna av $(1985)_{10}$ i följande baser

(i) basen 2.

lösning. Vi tillämpar euklides algoritmen på samma sätt som i boken sidorna 66- 67 (eller gamla boken sidorna 14-16). Vi delar med 2 och får att

$$1985 = 2 \cdot 992 + 1$$

$$992 = 2 \cdot 496 + 0$$

$$496 = 2 \cdot 248 + 0$$

$$248 = 2 \cdot 124 + 0$$

$$124 = 2 \cdot 62 + 0$$

$$62 = 2 \cdot 31 + 0$$

$$31 = 2 \cdot 15 + 1$$

$$15 = 2 \cdot 7 + 1$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

Vi får därmed att $(1985)_{10} = (11111000001)_2$. (Observera ordningen.)

(ii) basen 5.

lösning. Vi tillämpar euklides algoritmen på samma sätt som i boken sidorna 66- 67 (eller gamla boken sidorna 14-16). Vi delar med 5 och får att

$$1985 = 5 \cdot 397 + 0$$

$$397 = 5 \cdot 79 + 2$$

$$79 = 5 \cdot 15 + 4$$

$$15 = 5 \cdot 3 + 0$$

$$3 = 5 \cdot 0 + 3$$

Vi får därmed att $(1985)_{10} = (30420)_5$. (Observera ordningen.)

(iii) basen 11.

lösning. Vi tillämpar euklides algoritmen på samma sätt som i boken sidorna 66- 67 (eller gamla boken sidorna 14-16). Vi delar med 11 och får att

$$1985 = 11 \cdot 180 + 5$$

$$180 = 11 \cdot 16 + 4$$

$$16 = 11 \cdot 1 + 5$$

$$1 = 11 \cdot 0 + 1$$

Vi får därmed att $(1985)_{10} = (1545)_{11}$. (Observera ordningen.)

8.3.2 Hitta decimalrepresentationen (alltså basen 10) av

(i) $(11011101)_2$

lösning. Vi ser enkelt att $(11011101)_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = 1 + 0 + 4 + 8 + 16 + 0 + 64 + 128 = 221$ i basen 10.

(ii) $(4165)_7$

lösning. Vi ser enkelt att $(4165)_7 = 5 \cdot 7^0 + 6 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^3 = 5 + 42 + 49 + 1372 = 1468$ i basen 10.

8.7.1 Hitta största gemensamma delaren till 1320 och 714 och uttryck resultatet på formen $1320x + 714y$ för några $x, y \in \mathbb{Z}$.

lösning. Vi börjar med att ta fram största gemensamma delaren med hjälp av euklides algoritmen. Vi får att

$$\begin{aligned} \text{SGD}(1320, 714) &= \text{SGD}(714, 606) && \text{eftersom } 1320 = 714 \cdot 1 + 606 \\ &= \text{SGD}(606, 108) && \text{eftersom } 714 = 606 \cdot 1 + 108 \\ &= \text{SGD}(108, 66) && \text{eftersom } 606 = 108 \cdot 5 + 66 \\ &= \text{SGD}(66, 42) && \text{eftersom } 108 = 66 \cdot 1 + 42 \\ &= \text{SGD}(42, 24) && \text{eftersom } 66 = 42 \cdot 1 + 24 \\ &= \text{SGD}(24, 18) && \text{eftersom } 42 = 24 \cdot 1 + 18 \\ &= \text{SGD}(18, 6) && \text{eftersom } 24 = 18 \cdot 1 + 6 \\ &= 6 && \text{eftersom } 18 = 6 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

Vi har nu att $\text{SGD}(1320, 714) = 6$ och tar fram x och y så att $1320x + 714y = 6$. Vi börjar med att skriva om ekvationerna ovan till höger på

följande sätt

$$\begin{aligned}
 1320 &= 714 \cdot 1 + 606 \iff 606 = 1302 + 714 \cdot -1 \\
 714 &= 606 \cdot 1 + 108 \iff 108 = 714 + 606 \cdot -1 \\
 606 &= 108 \cdot 5 + 66 \iff 66 = 606 + 108 \cdot -5 \\
 108 &= 66 \cdot 1 + 42 \iff 42 = 108 + 66 \cdot -1 \\
 66 &= 42 \cdot 1 + 24 \iff 24 = 66 + 42 \cdot -1 \\
 42 &= 24 \cdot 1 + 18 \iff 18 = 42 + 24 \cdot -1 \\
 24 &= 18 \cdot 1 + 6 \iff 6 = 24 + 18 \cdot -1 \\
 18 &= 6 \cdot 3 + 0 \iff 0 = 18 + 6 \cdot -3 \quad \text{ointressant}
 \end{aligned}$$

Vi använder oss av dessa nya ekvationer och får att (observera att högerledet nedan alltid är lika med 6)

$$\begin{aligned}
 6 &= 24 \cdot 1 + 18 \cdot -1 \\
 &= 24 \cdot 1 + (42 + 24 \cdot -1) \cdot -1 = 42 \cdot -1 + 24 \cdot 2 \\
 &= 42 \cdot -1 + (66 + 42 \cdot -1) \cdot 2 = 66 \cdot 2 + 42 \cdot -3 \\
 &= 66 \cdot 2 + (108 + 66 \cdot -1) \cdot -3 = 108 \cdot -3 + 66 \cdot 5 \\
 &= 108 \cdot -3 + (606 + 108 \cdot -5) \cdot 5 = 606 \cdot 5 + 108 \cdot -28 \\
 &= 606 \cdot 5 + (714 + 606 \cdot 1) \cdot -28 = 714 \cdot -28 + 606 \cdot 33 \\
 &= 714 \cdot -28 + (1320 - 714 \cdot 1) \cdot 33 = 1320 \cdot 33 + 714 \cdot -61
 \end{aligned}$$

Vi kan därmed välja $x = 33$ och $y = -61$ och får då att $1320 \cdot 33 + 714 \cdot -61 = \text{SGD}(1320, 714) = 6$.

8.7.2 Visa att 725 och 441 är relativt prima (eng. coprime) och hitta heltal x och y så att $725x + 441y = 1$.

lösning. Att 725 och 441 är relativt prima betyder att $\text{SGD}(725, 441) = 1$. Vi börjar med att ta fram största gemensamma delaren med hjälp av euklides algoritmen. Vi får att

$$\begin{aligned}
 \text{SGD}(725, 441) &= \text{SGD}(441, 284) && \text{eftersom } 725 = 441 \cdot 1 + 284 \\
 &= \text{SGD}(284, 157) && \text{eftersom } 441 = 284 \cdot 1 + 157 \\
 &= \text{SGD}(157, 127) && \text{eftersom } 284 = 157 \cdot 5 + 127 \\
 &= \text{SGD}(127, 30) && \text{eftersom } 157 = 127 \cdot 1 + 30 \\
 &= \text{SGD}(30, 7) && \text{eftersom } 127 = 30 \cdot 4 + 7 \\
 &= \text{SGD}(7, 2) && \text{eftersom } 30 = 7 \cdot 4 + 2 \\
 &= \text{SGD}(2, 1) && \text{eftersom } 7 = 2 \cdot 3 + 1 \\
 &= 1 && \text{eftersom } 2 = 1 \cdot 2 + 0
 \end{aligned}$$

Vi har nu att $\text{SGD}(725, 441) = 1$ och tar fram x och y så att $725x + 441y = 1$. Vi börjar med att skriva om ekvationerna ovan till höger på

följande sätt

$$\begin{aligned}
 725 &= 441 \cdot 1 + 284 \iff 284 = 725 + 441 \cdot -1 \\
 441 &= 284 \cdot 1 + 157 \iff 157 = 441 + 284 \cdot -1 \\
 284 &= 157 \cdot 1 + 127 \iff 127 = 284 + 157 \cdot -1 \\
 157 &= 127 \cdot 1 + 30 \iff 30 = 157 + 127 \cdot -1 \\
 127 &= 30 \cdot 4 + 7 \iff 7 = 127 + 30 \cdot -4 \\
 30 &= 7 \cdot 4 + 2 \iff 2 = 30 + 7 \cdot -4 \\
 7 &= 2 \cdot 1 + 1 \iff 1 = 7 + 2 \cdot -1 \\
 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \iff 0 = 2 + 1 \cdot -2 \quad \text{ointeressant}
 \end{aligned}$$

Vi använder oss av dessa nya ekvationer och får att (observera att högerledet nedan alltid är lika med 1)

$$\begin{aligned}
 1 &= 7 \cdot 1 + 2 \cdot -3 \\
 &= 7 \cdot 1 + (30 + 7 \cdot -1) \cdot -3 = 30 \cdot -3 + 7 \cdot 13 \\
 &= 30 \cdot -3 + (127 + 30 \cdot -4) \cdot 13 = 127 \cdot 13 + 30 \cdot -55 \\
 &= 127 \cdot 13 + (157 + 127 \cdot -1) \cdot -55 = 157 \cdot -55 + 127 \cdot 68 \\
 &= 157 \cdot -55 + (284 + 157 \cdot -1) \cdot 68 = 284 \cdot 68 + 157 \cdot -123 \\
 &= 284 \cdot 68 + (441 + 284 \cdot 1) \cdot -123 = 441 \cdot -123 + 284 \cdot 191 \\
 &= 441 \cdot -123 + (725 - 441 \cdot 1) \cdot 191 = 725 \cdot 191 + 441 \cdot -314
 \end{aligned}$$

Vi kan därmed välja $x = 191$ och $y = -314$ och får då att $725 \cdot 191 + 441 \cdot -314 = \text{SGD}(725, 441) = 1$.

8.7.3 Hitta en lösning till ekvationen

$$325x + 26y = 91.$$

lösning. Vi har en diofantisk ekvation och observerar att $\frac{26}{13} = 2$, $\frac{91}{13} = 7$ samt att $\frac{325}{13} = 25$. Vi får därmed en ny ekvivalent ekvation

$$25x + 2y = 7$$

Vi hittar nu n och m sådan att $25n + 2m = \text{SGD}(25, 2)$. Vi kan använda oss av euklides algoritmen men ser i detta fall enkelt att $\text{SGD}(25, 2) = 1$ och att om $n = -1$ och $m = 13$ så får vi att $25 \cdot -1 + 2 \cdot 13 = 1$. Vi ser nu enkelt att om $x = 7n = -7$ och $y = 7m = 7 \cdot 13 = 91$ så får vi att $25 \cdot -7 + 2 \cdot 91 = 7$ vilket i sin tur ger oss att $325 \cdot -7 + 26 \cdot 91 = 91$.

E-mail address: hannes@math.kth.se

URL: <http://www.math.kth.se/~hannes>