

Uppgift 4 - hemskrivning 030224 När Fältspionen smugit ett varv runt Tolvan går larmet! En rotationssensor i lokalen centrumhar slagit till och fältet ändras till katastrofala

$$\mathbf{D} = \frac{1}{ax^2 + by^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{i punkten } (x, y)$$

Vår spion vågar inte närma sig singulariteten i origo men finner en genial utväg. Hon springer runt lokalen ett varv åt andra hållet varvid rotationssensorn slår ifrån larmet! Vilket arbete krävs för detta rundlöp?

lösning. Vi börjar med att observera att

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial y} &= \frac{-1 \cdot (ax^2 + by^2) - (-y) \cdot 2by}{(ax^2 + by^2)^2} \\ \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial x} &= \frac{1 \cdot (ax^2 + by^2) - x \cdot 2ax}{(ax^2 + by^2)^2} \end{aligned}$$

vilket ger oss att $\frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial y} = 0$, förutsatt att $(x, y) \neq (0, 0)$. Vi betraktar ett reguljärt slutet område R med ett cirkulärt hål med centrum i origo. Vi har alltså en yttre sluten kurva C och en inre cirkulär sluten kurva C_ε med radie ε . Vi får att

$$\int_C \frac{-ydx + xdy}{ax^2 + by^2} - \left(- \int_{C_\varepsilon} \frac{-ydx + xdy}{ax^2 + by^2} \right) = \iint_R \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial y} dA = 0$$

Vi ser att $\frac{-ydx + xdy}{ax^2 + by^2} = - \int_{C_\varepsilon} \frac{-ydx + xdy}{ax^2 + by^2}$ och har alltså att linjeintegralen är oberoende av val av kurvan C . Vi låter C vara enhetscirkeln, sätter

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ 0 &\leq t \leq 2\pi \end{aligned}$$

och får att $\int_C \frac{-ydx + xdy}{ax^2 + by^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin^2 t + \cos^2 t) dt}{a \cos^2 t + b \sin^2 t} = \{\beta\} = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$.

E-mail address: hannes@math.kth.se

URL: <http://www.math.kth.se/~hannes>