FLERVARIABEL ANALYS 020121

HANNES REIJNER

12.5.7 Använd två olika metoder för att beräkna $\frac{\partial z}{\partial x}$ då $z = \arctan(u/v)$, $u = 2x + y$ och $v = 3x - y$.

lösning. Metod 1 (kedjeregeln):

Enligt kedjeregeln har vi att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Vi beräknar nu partialderivatorna:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{1}{v} = \frac{1}{v+\frac{u^2}{v}} = \frac{v}{v^2+u^2} \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= 2 \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{u}{v^2+u^2} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= 3
\end{aligned}$$

Vi får därmed (enligt kedjeregeln) att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v}{v^2+u^2}\cdot 2 - \frac{u}{v^2+u^2}\cdot 3 = \{\text{substituera}\} = \frac{2(3x-y)-(2x+y)3}{(3x-y)^2+(2x+y)^2} =$$
$$= \frac{6x-2y-6x-3y}{9x^2-6xy+y^2+4x^2+4xy+y^2} = \frac{-5y}{13x^2-2xy+2y^2}$$

Metod 2 (direkt substitution):

Vi substituerar direkt och får att

$$z = \arctan(u/v) = \{\text{substituera}\} = \arctan\left(\frac{2x+y}{3x-y}\right)$$

vilket ger oss att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{2x+y}{3x-y})^2}\cdot\frac{2(3x-y)-(2x+y)3}{(3x-y)^2} = \frac{6x-2y-6x-3y}{(3x-y)^2+(2x+y)^2} =$$
$$= \frac{-5y}{9x^2-6xy+y^2+4x^2+4xy+y^2} = \frac{-5y}{13x^2-2xy+2y^2}$$

Vi ser att lösningarna för de båda metoderna är lika (som förväntat).

12.5.15 Antag att f har kontinuerliga derivator av alla ordningar. Låt $z = f(x, y)$, $x = 2s + 3t$ och $y = 3s - 2t$.

(a) Beräkna $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$:

lösning. Vi börjar med att beräka $\frac{\partial z}{\partial s}$ med hjälp av kedjeregeln:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Vi får att

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= 2 \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= 3 \end{aligned}$$

och därmed att

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y}$$

Eftersom $\frac{\partial z}{\partial s}$ är en funktion av x och y kan vi återigen använda kedjeregeln och får då att:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 3\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= \{ \text{ kedjeregeln } \} = 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right) + 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot 2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\cdot 3\right) + 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot 2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot 3\right) =$$

$$= 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \{ \text{ Kontinuitet ger oss att } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\} =$$

$$= 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(c) Beräkna $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$:

lösning. Vi börjar med att beräka $\frac{\partial z}{\partial t}$ med hjälp av kedjeregeln:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Vi får att

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= 3 \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -2 \end{aligned}$$

och därmed att

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 3\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y}$$

Eftersom $\frac{\partial z}{\partial t}$ är en funktion av x och y kan vi återigen använda kedjeregeln och får då att:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(3\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= \{ \text{ kedjeregeln } \} = 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right) - 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot 3 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\cdot(-2)\right) - 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot 3 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot(-2)\right) =$$

$$= 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \{ \text{ Kontinuitet ger oss att } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\} =$$

$$= 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 12\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(12.6.1) Använd linjärisering för att hitta ett approximativt värde till funktionen $f(x, y) = x^2y^3$ i punkten $(3, 1; 0, 9)$.

lösning. Vi vet att funktionen $f(x, y)$ i närheten av punkten (a, b) kan approximeras av $f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y - b)$. Vi linjäriserar kring punkten $(3, 1)$ och får att

$$f(3{,}1;\ 0{,}9) = f(3{+}0{,}1; 1{-}0{,}1) \approx f(3, 1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)\right)\cdot(3{,}1{-}3) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1)\right)\cdot(0{,}9{-}1)$$

Vi beräknar nu funktionsvärdet och partialderivatorna för punkten $(3, 1)$:

$$\begin{aligned} f(3, 1) &= 3^2 1^3 = 9 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 2xy^3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = 2 \cdot 3 \cdot 1^3 = 6 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 3 \cdot 3^2 \cdot 1^2 = 27 \end{aligned}$$

Det följer därmed att

$$f(3{,}1;\ 0{,}9) \approx 9 + 6 \cdot 0, 1 + 27 \cdot (-0, 1) = 6, 9$$

(En exakt uträkning ger att $f(3{,}1;\ 0{,}9) = 7, 00569$.)

(12.6.7) Kanterna på en rektangulär låda är uppmätta med en precision på 1% av sina värden. Vad är det approximativt maximala procentuella felet på

(a) volymen?

lösning. Om vi kallar sidorna x, y och z kan volymen uttryckas som $V(x, y, z) = xyz$ och felen som $|\frac{\Delta x}{x}|$, $|\frac{\Delta y}{y}|$, $|\frac{\Delta z}{z}| \leq \frac{1}{100}$. Vi låter

ΔV beteckna den maximala avvikelsen för lådans volym och får då att det maximala procentuella felet är $100 \cdot |\frac{\Delta V}{V}|$. Vidare har vi att

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z$$

och får att

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = xz, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = xy$$

Det följer att

$$\Delta V \approx yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z$$

och därmed att

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{yz\Delta x}{xyz} + \frac{xz\Delta y}{xyz} + \frac{xy\Delta z}{xyz} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

Det följer därmed från triangelolikheten att

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + \left|\frac{\Delta z}{z}\right| = 3 \cdot \frac{1}{100} = 3\%$$

(b) arean av någon sida?

lösning. (Helt analogt med uppgift (a)) Eftersom vi har ett lika stort maximalt procentuellt fel för alla sidor kan vi studera en godtycklig sida. Om vi kallar sidorna x och y kan arean av en sida uttryckas som $A(x, y) = xy$ och felen som $|\frac{\Delta x}{x}|$, $|\frac{\Delta y}{y}| \leq \frac{1}{100}$. Vi låter ΔA beteckna den maximala avvikelsen för sidans area och får då att det maximala procentuella felet är $100 \cdot |\frac{\Delta A}{A}|$. Vidare har vi att

$$\Delta A \approx \frac{\partial A}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial A}{\partial y}\Delta y$$

och får att

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = x$$

Det följer att

$$\Delta A \approx y\Delta x + x\Delta y$$

och därmed att

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{y\Delta x}{xy} + \frac{x\Delta y}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Det följer därmed från triangelolikheten att

$$\left|\frac{\Delta A}{A}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} +\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right| = 2 \cdot \frac{1}{100} = 2\%$$

(c) diagonalen?

lösning. Om vi kallar sidorna x, y och z kan längden av lådans diagonal uttryckas som $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ och felen som $|\frac{\Delta x}{x}|, |\frac{\Delta y}{y}|, |\frac{\Delta z}{z}| \leq \frac{1}{100}$. Vi låter Δf beteckna den maximala avvikelsen för lådans diagonal och får då att det maximala procentuella felet är $100 \cdot |\frac{\Delta f}{f}|$. Vidare har vi att

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

och får att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Det följer att

$$\Delta f \approx \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Delta y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Delta z$$

och därmed att

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\Delta x + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\Delta y + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\Delta z$$

Vi muliplicerar nu kvoterna i föregående uttryck med $\frac{x}{x}$, $\frac{y}{y}$ respektive $\frac{z}{z}$ för att kunna använda uttrycken för felen.

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\Delta x}{x} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\Delta y}{y} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\Delta z}{z}$$

Det följer nu från triangelolikheten att

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| \approx \left|\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\Delta x}{x} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\Delta y}{y} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\Delta z}{z}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\Delta y}{y}\right| + \left|\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\Delta z}{z}\right| =$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{100} = \frac{1}{100} = 1\%$$

(12.6.13) Hitta jakobianen för transformationen $\mathbf{f}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. (Även om (r,θ) kan ses som *polära koordinater* i xy-planet är de kartesiska koordinater i $r\theta$-planet.)

lösning. Vi har att jakobianen J för $\mathbf{f}= (f_1, f_2)$, även kallad derivatan av $\mathbf{f}$, ges av

$$J = \mathbf{f}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$