Övning 13

Introduktion

Varmt välkomna till trettonde och sista övningen i Reglerteknik AK!

Håkan Terelius hakante@kth.se

Inför lab 3:

- Redovisning i par, endast en av er ska anmäla sig.
- Att testprogrammet `lab3robot` ger grön signal är nödvändigt men inte tillräckligt villkor för att klara labben.
- Ni har max 20 minuter på er att övertyga läraren att ni förstår labben.

Mina övningsanteckningarna finns tillgängliga från www.ee.kth.se/~hakante/

Repetition

Framkoppling

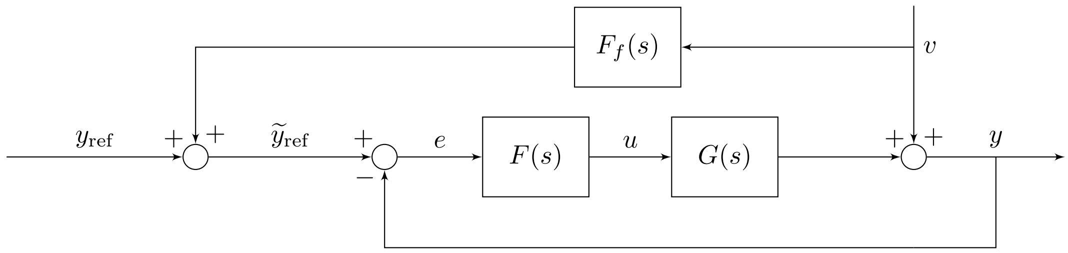

Figure 1: Fram- och återkoppling

Överföringfunktionen från störningen v och referenssignalen y_{ref} till utsignalen y är

$$Y(s) = G_C(s)\widetilde{Y}_{\text{ref}}(s) + S(s)V(s) = G_C(s)(Y_{\text{ref}}(s) + F_f(s)V(s)) + S(s)V(s) = G_C(s)Y_{\text{ref}}(s) + (G_C(s)F_f(s) + S(s))V(s)$$

För att eliminera inverkan av störningen $V(s)$ vill vi att $G_C(s)F_f(s) + S(s) = 0$, alltså väljer vi framkopplingen till

$$F_f(s) = -G_C(s)^{-1}S(s)$$

Ofta tas derviator bort från framkopplingen F_f eftersom de kan vara svåra att realisera.

Teori

Implementering

Vi har under kursen tittat på *kontinuerliga* system och regulatorer

- PID regulatorn

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

- Lead-Lag regulatorn

$$U(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}\frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}E(s)$$

- Tillståndsåterkoppling

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = & Cx(t) \end{cases}$$

Detta fungerar bra för analoga, mekaniska och elektriska regulatorer, men de senaste 40 åren har digitala regulatorer kommit att dominera. Problemet är att datorerna arbetar i diskret tid, men det fysiska systemen fortfarande är kontinuerliga.

Figure 2: Diskret implementering av regulatorer

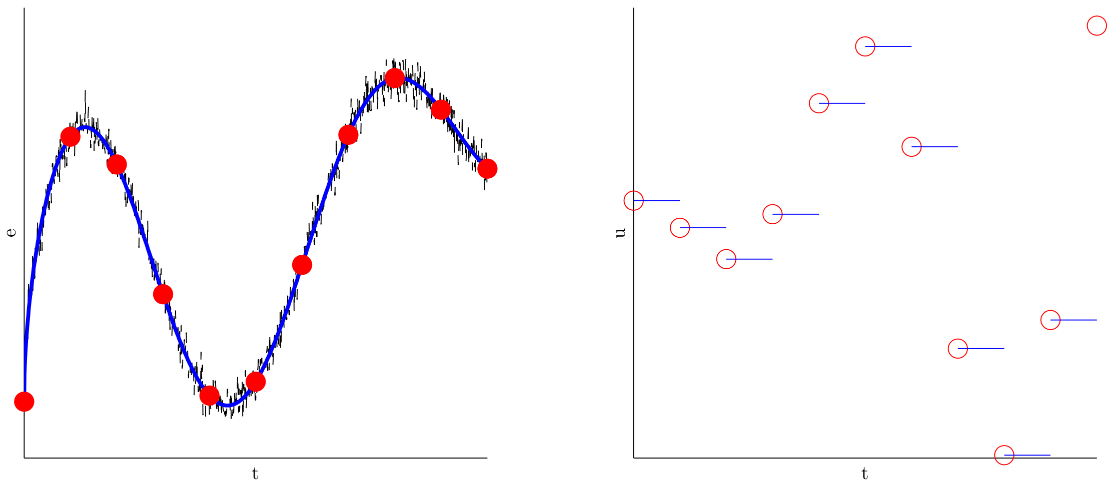

Figure 3: Signaler vid implementering

Därför approximerar vi kontinuerliga system med diskreta, och differentialekvationerna blir istället differansekvationer. För att approximera derivator kan vi använda oss av exempelvis *Euler-bakåt* eller *Tustins* approximationer.

Euler-bakåt approximationen Δ_e

$$\dot{x}(t) \approx \Delta_e x(t) = \frac{1}{T}\Big(x(t) - x(t-T)\Big)$$
$$\ddot{x}(t) \approx \Delta_e \dot{x}(t) \approx \frac{1}{T^2}\Big(x(t) - 2x(t-T) + x(t-2T)\Big)$$

Tustins approximation Δ_t ges som lösningen till

$$\frac{1}{2}\Big(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t-T)\Big) = \frac{1}{T}\Big(x(t) - x(t-T)\Big)$$

där

$$\dot{x}(t) \approx \Delta_t x(t)$$

Operatorformalism

Är egentligen bara en notation, men kan användas för att enklare beskriva komplicerade system.

- Deriveringsoperatorn p:
$$\dot{x}(t) = p\,x(t)$$
$$\ddot{x}(t) = p^2\,x(t)$$

- Förskjutningsoperatorn q_T:
$$x(t+T) = q_T\,x(t)$$
$$x(t-T) = q_T^{-1}\,x(t)$$

Euler-bakåt kan skrivas med operatorformalism som

$$p\,x(t) = \dot{x}(t) \approx \Delta_e x(t) = \frac{1}{T}\Big(x(t) - x(t-T)\Big) = \frac{1}{T}\Big(1 - q_T^{-1}\Big)x(t)$$

och alltså kan vi uttrycka deriveringsoperatorn som

$$p \approx \frac{1}{T}\Big(1 - q_T^{-1}\Big)$$

Tustins formel kan på liknande sätt skrivas

$$\frac{1}{2}\Big(1 + q_T^{-1}\Big)\Delta_t x(t) = \frac{1}{T}\Big(1 - q_T^{-1}\Big)x(t)$$
$$p\,x(t) \approx \Delta_t x(t) = \frac{2}{T}\frac{1 - q_T^{-1}}{1 + q_T^{-1}}x(t)$$
$$p \approx \frac{2}{T}\frac{1 - q_T^{-1}}{1 + q_T^{-1}}$$

Titta nu på Taylorutvecklingen av förskjutningsoperatorn

$$q_T x(t) = x(t+T) = x(t) + T\dot{x}(t) + \frac{T^2}{2!}\ddot{x}(t) + \frac{T^3}{3!}\dddot{x}(t) + \cdots = x(t) + Tp\,x(t) + \frac{T^2p^2}{2!}x(t) + \frac{T^3p^3}{3!}x(t) + \cdots = e^{Tp}x(t)$$
$$q_T = e^{Tp}$$

Jämför med Laplacedomänen, där multiplikation med s motsvarar en derivering. Där ser vi att e^{-sT} är en tidsfördröjning av systemet, vilket kan verifieras direkt genom Laplacetransformen.

Sampling

- T är samplingsintervallet, tiden mellan mätningarna
- $f_s = \frac{1}{T}$ är då samplingsfrekvensen i Hz
- $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ är samplings(vinkel)frekvensen i rad/s
- $\omega_N = \frac{\pi}{T}$ är nyquistfrekvensen

Aliaseffekten säger att frekvenser över nyquistfrekvensen $\omega_N = \frac{\pi}{T}$ inte kan skiljas från långsammare frekvenser.

Låt $\omega = k\omega_s + \bar{\omega}$ vara frekvensen på signalen, där $k \in \mathbb{N}$ och $0 \leq \bar{\omega} < \omega_s$. Den samplade signalen kommer då synas som

$$\begin{cases} \bar{\omega} & \text{om } \bar{\omega} < \omega_N \\ \omega_s - \bar{\omega} & \text{om } \bar{\omega} > \omega_N \end{cases}$$

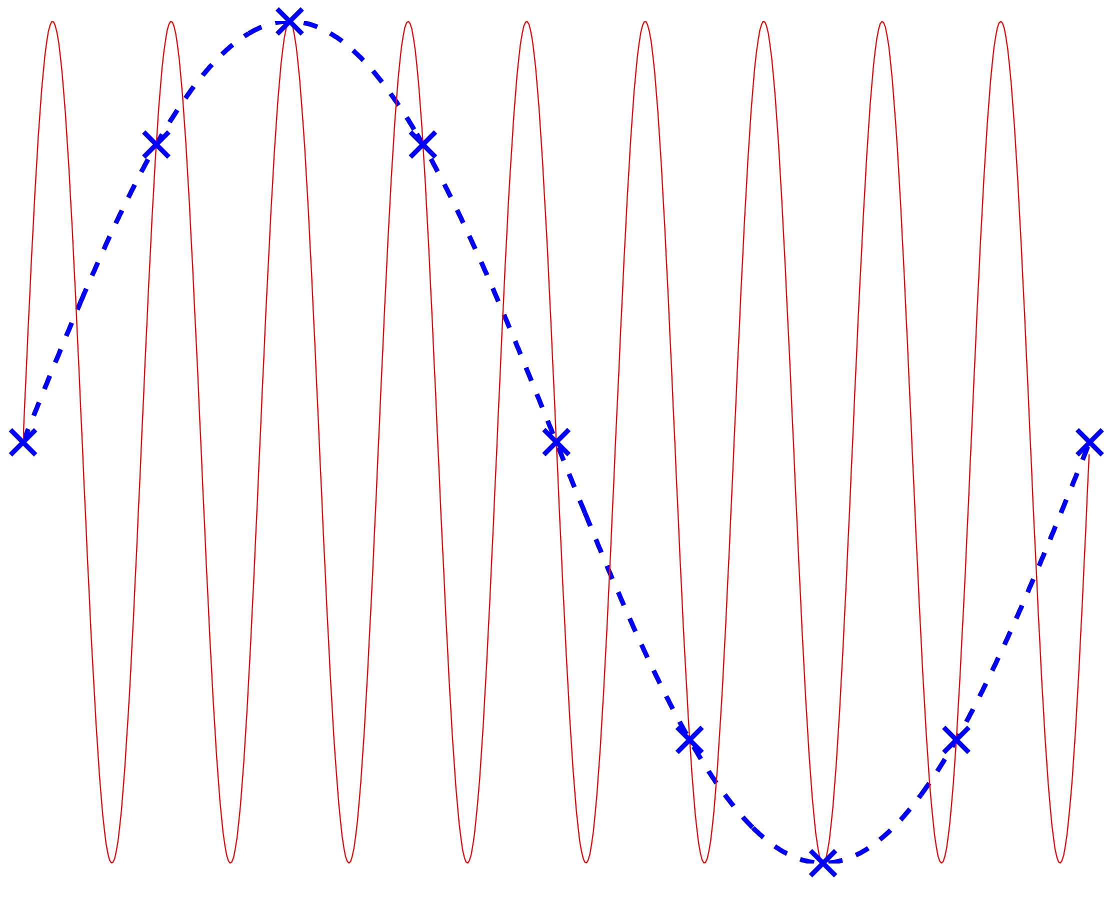

Figure 4: Aliaseffekten gömmer signaler över nyquistfrekvensen

Fasförsämring sker på grund av samplingen. En tumregel är att en samplingsfrekvens på $\omega_s = 20\omega_c$ ger $20°$ fasförsämring.

Problem 11.2

11.2 a)

Från analysens fundamentalsats vet vi att

$$\underbrace{y((k+1)T)}_{y_{k+1}} = \underbrace{y(kT)}_{y_k} + \int_{kT}^{(k+1)T} \underbrace{\dot{y}(\tau)}_{u(\tau)} \, d\tau$$

Notera att i detta intervall är $u(\tau) = u_k$, vilket innebär att integralen $\int_{kT}^{(k+1)T} \dot{y}(\tau) d\tau = Tu_k$. Alltså har vi att

$$y_{k+1} = y_k + Tu_k$$

11.2 b)

Nu använder vi oss av en proportionell återkoppling $u_k = -Ky_k$, vilket ger oss differansekvationen

$$y_{k+1} = y_k + Tu_k = y_k - TKy_k = (1 - TK)y_k$$

Genom rekursion får vi nu att

$$y_k = (1 - TK)y_{k-1} = (1 - TK)^2 y_{k-2} = \ldots = (1 - TK)^k y_0$$

Systemet är asymptotiskt stabilt om $|y_k| \to 0$ då $k \to \infty$. Alltså måste vi ha $(1 - TK)^k \to 0$ då $k \to \infty$, eller

$$|1 - TK| < 1$$

vilket ger oss villkoret ($T > 0$)

$$0 < K < \frac{2}{T}$$

Problem 11.1

Först, låt oss omvandla regulatorn till tidsdomänen

$$U(s) = KN\left(\frac{s+b}{s+bN}\right)E(s)$$

$$(s + bN)U(s) = KN(s + b)E(s)$$

$$\dot{u}(t) + bNu(t) = KN\dot{e}(t) + KNbe(t)$$

Vi ska nu använda oss av Tustins approximation Δ_t som ges av

$$\frac{1}{2}\Big(\Delta_t x(t) + \Delta_t x(t - T)\Big) = \frac{1}{T}\Big(x(t) - x(t - T)\Big)$$

Ersätter vi derivatorna med Tustins approximation Δ_t får vi

$$\Delta_t u(t) + bNu(t) = KN\Delta_t e(t) + KNbe(t)$$

Detta gäller för alla tidpunkter, så vi kan speciellt skifta tiden med T steg:

$$\Delta_t u(t-T) + bNu(t-T) = KN\Delta_t e(t-T) + KNbe(t-T)$$

Adderar vi de båda ekvationerna så får vi

$$\Delta_t u(t)+bNu(t)+\Delta_t u(t-T)+bNu(t-T) = KN\Delta_t e(t)+KNbe(t)+KN\Delta_t e(t-T)+KNbe(t-T)$$

$$\underbrace{\Delta_t u(t) + \Delta_t u(t-T)}_{\frac{2}{T}(u(t)-u(t-T))} + bN(u(t)+u(t-T)) = KN\underbrace{(\Delta_t e(t) + \Delta_t e(t-T))}_{\frac{2}{T}(e(t)-e(t-T))} + KNb(e(t)+e(t-T))$$

$$\left(bN + \frac{2}{T}\right)u(t) + \left(bN - \frac{2}{T}\right)u(t-T) = KN\left(b + \frac{2}{T}\right)e(t) + KN\left(b - \frac{2}{T}\right)e(t-T)$$

$$u(t) = -\frac{\left(bN - \frac{2}{T}\right)}{\left(bN + \frac{2}{T}\right)}u(t-T) + KN\frac{\left(b + \frac{2}{T}\right)}{\left(bN + \frac{2}{T}\right)}e(t) + KN\frac{\left(b - \frac{2}{T}\right)}{\left(bN + \frac{2}{T}\right)}e(t-T)$$

Med parametrarna $T = 0.1$, $N = 10$, $b = 0.1$ och $K = 2$ fås

$$u(t) = \underbrace{\frac{19}{21}}_{\beta_1}u(t-T) + \underbrace{\frac{402}{21}}_{\alpha_1}e(t) - \underbrace{\frac{398}{21}}_{\alpha_2}e(t-T)$$

Problem 11.3

11.3 a)

Både systemet och samplingsprocessen är linjära, så insignalen $u = u_0 + u_1$ ger upphov till utsignalen $y = y_0 + y_1$ där y_0 kommer från u_0 och y_1 kommer från u_1. Här är vi intresserade av hur störningen u_1 transformeras till utsignalen y_1.

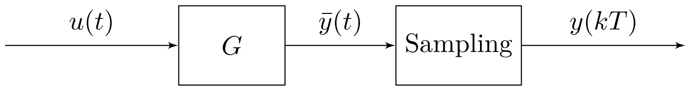

Figure 5: Samplingsprocessen i uppgift 11.3

Låt oss först titta på den kontinuerliga utsignalen $\bar{y_1}(t)$ före sampling. Vi vet att frekvenssvaret för

$$u_1(t) = \sin\omega_2 t$$

blir

$$\bar{y_1}(t) = \bar{A}\sin(\omega_2 t + \bar{\phi})$$

där amplituden ges av

$$\bar{A} = |G(i\omega_2)| = \left|\frac{1}{1 + i\omega_2 T_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_2^2 T_1^2}}$$

och fasförskjutningen ges av

$$\bar{\phi} = \arg G(i\omega_2) = \arg \frac{1}{1 + i\omega_2 T_1} = -\arctan \omega_2 T_1$$

Vi är nu intresserade av hur utsignalen

$$\bar{y_1}(t) = \bar{A} \sin(\omega_2 t + \bar{\phi})$$

samplas till

$$y_1(kT) = A \sin(\omega_1 kT + \phi)$$

där $\frac{\pi}{T} < \omega_2 < \frac{2\pi}{T}$ kommer synsas som $\omega_1 < \frac{\pi}{T}$.

På grund av aliaseffekten göms frekvenser över $\omega_N = \frac{\pi}{T}$ eftersom vi kan addera $\frac{2\pi}{T}$ till frekvensen utan att det syns. Låt oss se hur signalen kommer synas

$$y_1(kT) = \bar{y_1}(kT) = \bar{A} \sin(\omega_2 kT + \bar{\phi}) = \bar{A} \sin(\pi - \omega_2 kT - \bar{\phi}) = \bar{A} \sin(2\pi k + \pi - \omega_2 kT - \bar{\phi}) =$$
$$\underbrace{\bar{A}}_{A} \sin\left(\underbrace{\left(\frac{2\pi}{T} - \omega_2\right)}_{\omega_1} kT + \underbrace{\pi - \bar{\phi}}_{\phi}\right)$$

Alltså har den samplade utsignalen parametrarna

$$A = \bar{A} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_2^2 T_1^2}}$$
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} - \omega_2 = \omega_s - \omega_2$$
$$\phi = \pi - \bar{\phi} = \pi + \arctan \omega_2 T_1$$

11.3 b)

Notera att alla sinus-signaler med frekvens ω skalas om med faktorn $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}$. Vi vill nu att signaler med frekvens $\frac{\pi}{T} < \omega < \frac{2\pi}{T}$ ska dämpas så mycket som möjligt, men signaler med frekvens $\omega < \frac{\pi}{T}$ får inte dämpas med mer än faktorn $\sqrt{2}$.

Villkoret blir uppfyllt precis då signalen med frekvens $\omega = \frac{\pi}{T}$ dämpas med faktorn $\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{T^2} T_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{\pi^2}{T^2} T_1^2 = 1$$
$$T_1 = \frac{T}{\pi}$$

Störsignalen får då amplituden

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_2^2 \frac{T^2}{\pi^2}}}$$