Övning 12

Introduktion

Varmt välkomna till tolfte övningen i Reglerteknik AK!

Håkan Terelius hakante@kth.se

Inför lab 3:

- Redovisning i par, endast en av er ska anmäla sig.
- Att testprogrammet `lab3robot` ger grön signal är nödvändigt men inte tillräckligt villkor för att klara labben.
- Ni har max 20 minuter på er att övertyga läraren att ni förstår labben.

Repetition

Tillståndsåterkoppling

Öppna systemets dynamik formuleras som ett system av första ordningens differentialekvationer

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

I tillståndsåterkopplingen låter vi insignalen u styras av systemets tillstånd x istället för utsignalen y

$$u(t) = r(t) - Lx(t)$$

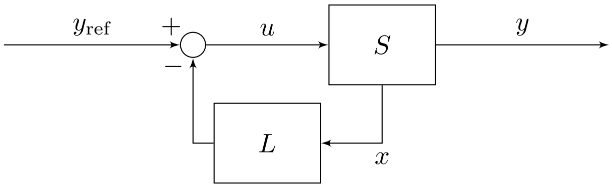

Figure 1: Tillståndsåterkoppling

Det slutna systemet blir

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Br(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Polerna till det slutna systemet ges av egenvärdena till $A - BL$.

Om polerna kan väljas fritt så är systemet *styrbart*. Systemet är styrbart om $\det(S) \neq 0$, där

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Observatör

Om systemets tillstånd x inte går att mäta direkt så skattas det från utsignalen y med hjälp av en *observatör*.

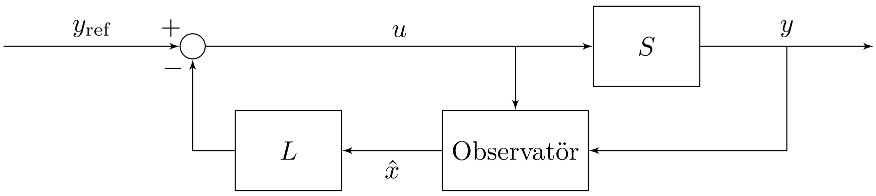

Figure 2: Tillståndsåterkoppling med observatör

Observatören har tillståndsekvation

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

Polerna till observatören ges av egenvärdena till $A - KC$.

Vi vill att observatören ska vara snabbare än systemet, alltså att observatörens poler är längre ut i VHP än polerna till det slutna systemet.

Om observatörens poler kan väljas fritt så är systemet *observerbart*. Systemet är observerbart om $\det(O) \neq 0$, där

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Minimal realisation

En tillståndsbeskrivning som är både styrbar och observerbar är en minimal realisation av systemet.

Det innebär också att det inte finns någon tillståndsbeskrivning som har samma överföringsfunktion, men med lägre dimension på tillståndsvektorn.

Teori

Framkoppling

Om störningen direkt kan mätas finns möjligheten att direkt eliminera inverkan genom framkoppling.

Tidigare hade vi att överföringsfunktionen från störningen v till utsignalen y var känslighetsfunktionen $S(s) = \frac{1}{1+G_O(s)}$.

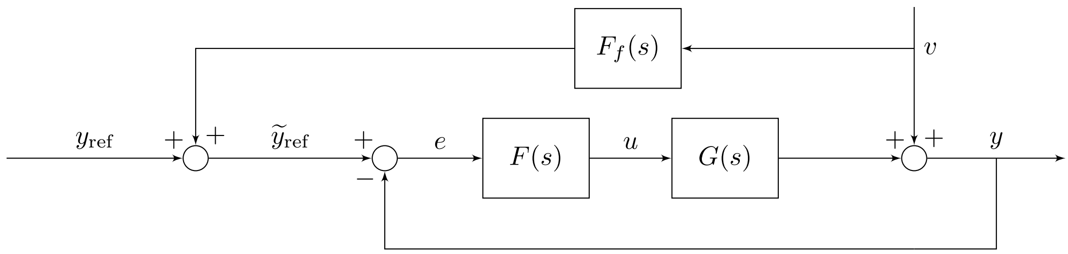

Figure 3: Fram- och återkoppling

Från signalen $\widetilde{y}_{\text{ref}}$ till utsignalen y är överföringsfunktionen fortfarande det slutna systemet $G_C(s)$, där $\widetilde{y}_{\text{ref}} = y_{\text{ref}} + F_f v$.

Vi har alltså att

$$Y(s) = G_C(s)\widetilde{Y}_{\text{ref}}(s) + S(s)V(s) = G_C(s)(Y_{\text{ref}}(s) + F_f(s)V(s)) + S(s)V(s) = \\ G_C(s)Y_{\text{ref}}(s) + (G_C(s)F_f(s) + S(s))V(s)$$

För att eliminera inverkan av störningen $V(s)$ vill vi att $G_C(s)F_f(s) + S(s) = 0$, alltså väljer vi framkopplingen till

$$F_f(s) = -G_C(s)^{-1}S(s)$$

Om F_f inte är proper (nämnaren har högre grad än täljaren) kan den vara svår att realisera. Det går fortfarande att approximera framkopplingen för att minska störningen, men den kommer då inte helt elimineras.

Problem 9.4

Först kan vi titta på det öppna systemet för att se om polerna behöver flyttas. Transformera från tillståndsformen till överföringsfunktionen

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Nuvarande poler ligger alltså i $s = 0$ och $s = -1$, så de måste flyttas.

Nästa sak vi tittar på är om systemet är styrbart, så att vi kan placera polerna där vi vill. Titta på styrbarhetsmatrisen

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(S) = -1 \neq 0$$

Så systemet är styrbart!

Med tillståndsåterkopplingen $u = -Lx + r$, där $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ fås det slutna systemet

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Br(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

med poler i egenvärdena till $A - BL$.

$$\det\left(\lambda I - (A - BL)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + l_1 & l_2 \\ l_1 & \lambda + 1 + l_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + (1 + l_1 + l_2)\lambda + l_1 = 0$$

Jämför med $0 = (\lambda - (-2))(\lambda - (-3)) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$, så identifierar vi $l_1 = 6$ och $l_2 = -2$. Tillståndsåterkopplingen blir alltså

$$L = \begin{bmatrix} 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Vi vill nu ha en snabbare observatör än vad systemet är, det vill säga att observatörsens poler ska ligga längre ut i VHP än systemets poler. Först kontrollerar vi om systemet är observerbart med hjälp av observerbarhetsmatrisen

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(O) = 1 \neq 0$$

Alltså är systemet observerbart!

Designar nu observatören $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$, med tillståndsekvation

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

Polerna ges av egenvärdena till $A - KC$,

$$\det(\lambda I - (A - KC)) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + k_1 & -k_1 \\ k_2 & \lambda + 1 - k_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + (1 + k_1 - k_2)\lambda + k_1 = 0$$

Placerar exempelvis polerna som en dubbelpol i -4, så jämför med $(\lambda - (-4))^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$, och identifierar $k_1 = 16$ och $k_2 = 9$.

$$K = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Vi kan även titta på det slutna systemets överföringsfunktion

$$G_C(s) = C(sI - (A - BL))^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Notera att den statiska förstärkningen är $G_C(0) = \frac{1}{6}$. Ganska vanligt är att man skalar om referenssignalen i tillståndsåterkopplingen med en konstant l_0 så att

$$u = -Lx + l_0 r$$

Då fås istället den statiska förstärkningen $G_C(0) = \frac{l_0}{6}$, och om vi exempelvis väljer $l_0 = 6$ så får vi statisk förstärkning 1.

Problem 9.8

9.8 a)

Vi har fått tillståndsvektorn $x = \begin{bmatrix} q \\ h \end{bmatrix}$, och vill nu bestämma $\dot{x}$ där u och v är externa signaler.

$$\dot{h} = \frac{1}{A}q - \frac{1}{A}v$$

$$Q = \frac{k_1}{1+Ts}U \quad \Rightarrow \quad T\dot{q} + q = k_1 u \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = -\frac{1}{T}q + \frac{k_1}{T}u$$

Tillståndsekvationerna kan alltså skrivas

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A} \end{bmatrix} v$$

$$y = h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

där u är styrsignalen $u = -Lx + r = -l_1 q - l_2 h + r$ och v är en störning.

Kontrollera om systemet är styrbart,

$$S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} & -\frac{k_1}{T^2} \\ 0 & \frac{k_1}{AT} \end{bmatrix}$$

$$\det(S) = \frac{k_1^2}{AT^2} \neq 0$$

Polerna ges av egenvärdena till $A - BL$,

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \lambda^2 + \frac{1}{T}(1 + k_1 l_1)\lambda + \frac{k_1 l_2}{AT} = 0$$

Vi ville placera polerna i -2, så vi jämför med $(\lambda - (-2))^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ och får

$$l_1 = \frac{4T - 1}{k_1} = 1, \quad l_2 = \frac{4AT}{k_1} = 2$$

9.8 b)

Vid stationärt tillstånd är $\dot{x} = 0$, vi har alltså för det slutna systemet (där $r = 0$)

$$\dot{x} = (A - BL)x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A} \end{bmatrix} v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1+k_1 l_1}{T} & -\frac{k_1 l_2}{T} \\ \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A} \end{bmatrix} v = 0$$

$$q = v$$

Inflödet är lika med utflöded vid stationäritet!

$$(1 + k_1 l_1)q = -k_1 l_2 h \quad \Rightarrow \quad q = -h$$

Statiska felet blir alltså

$$e = r - y = r - h = r + v = 0 + 0.1 = 0.1$$

Återkopplingen tar inte bort det statiska felet!

9.8 c)

Utan framkoppling har vi

$$y = G_C r + G_V v$$

Med framkoppling har vi istället

$$y = G_C(r + F_f v) + G_V v = G_C r + (G_C F_f + G_V)v$$

För att ta bort störningen vill vi att $G_C F_f + G_V = 0$, alltså att $F_f = -\frac{G_V}{G_C}$. Bestämmer nu G_C och G_V för det slutna systemet utan framkoppling.

Det återkopplade systemet har tillståndsekvationerna

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1+k_1 l_1}{T} & -\frac{k_1 l_2}{T} \\ \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix}}_{A_C} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} r + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A} \end{bmatrix}}_{B_V} v$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x$$

$$G_C(s) = C(sI - A_C)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1+k_1 l_1}{T} & \frac{k_1 l_2}{T} \\ -\frac{1}{A} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{s^2 + \frac{1}{T}(1 + k_1 l_1)s + \frac{k_1 l_2}{AT}} \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & s + \frac{1+k_1 l_1}{T} \end{bmatrix} B = \frac{\frac{k_1}{TA}}{s^2 + \frac{1}{T}(1 + k_1 l_1)s + \frac{k_1 l_2}{AT}} =$$

$$\frac{2}{s^2 + 4s + 4}$$

$$G_V(s) = C(sI - A_C)^{-1}B_V = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{T}(1 + k_1 l_1)s + \frac{k_1 l_2}{AT}} \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & s + \frac{1+k_1 l_1}{T} \end{bmatrix} B_V =$$

$$-\frac{\frac{1}{A}(s + \frac{1+k_1 l_1}{T})}{s^2 + \frac{1}{T}(1 + k_1 l_1)s + \frac{k_1 l_2}{AT}} = -\frac{s+4}{s^2 + 4s + 4}$$

Framkopplingen blir alltså

$$F_f = -\frac{G_V}{G_C} = -\frac{-\frac{s+4}{s^2+4s+4}}{\frac{2}{s^2+4s+4}} = \frac{s}{2} + 2$$

Vi vill inte ha någon derivata i framkopplingen, och alltså approximerar vi framkopplingen med $F_f = 2$.

Med framkopplingen kan vi alltså skriva det återkopplade systemet som

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1+k_1 l_1}{T} & -\frac{k_1 l_2}{T} \\ \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix}}_{A_C} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} (r + 2v) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A} \end{bmatrix}}_{B_V} v$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x$$

Tittar vi på det statiska felet $\dot{x} = 0$ när $r = 0$ så får vi att

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1+k_1 l_1}{T} & -\frac{k_1 l_2}{T} \\ \frac{1}{A} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2\frac{k_1}{T} \\ -\frac{1}{A} \end{bmatrix} v = 0$$

Det vill säga att $q = v$ som tidigare, men också att $-(1 + k_1 l_1)q - k_1 l_2 h + 2k_1 v = 0$ vilket ger

$$h = \frac{2k_1 - 1 - k_1 l_1}{k_1 l_2} v = \frac{2 - 1 - 1}{2} v = 0$$

Felet blir således också noll,

$$e = r - y = r - h = 0 - 0 = 0$$

Med framkopplingen tar vi bort det statiska felet som störningen orsakar.

9.8 d)

Om nu $k_1 \neq 1$ avviker från vår modell så får vi trots allt ett statisk fel.

$$h = \frac{2k_1 - 1 - k_1 l_1}{k_1 l_2} v = \frac{k_1 - 1}{2k_1} v$$

$$e = r - h = \frac{1 - k_1}{2k_1} v$$

9.8 e)

För att ta bort det stationära felet så vill vi lägga till en integrator. Vi introducerar därför ett nytt tillstånd z som är integralen av e, $z = \int e = \int (r - y)$, $\dot{z} = r - y = r - h$.

Vi utökar alltså bara det tidigare öppna systemet med tillståndet z, och får tillståndsekvationerna

$$x = \begin{bmatrix} q \\ h \\ z \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Är systemet fortfarande styrbart?

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} & -\frac{k_1}{T^2} & \frac{k_1}{T^3} \\ 0 & \frac{k_1}{AT} & -\frac{k_1}{AT^2} \\ 0 & 0 & -\frac{k_1}{AT} \end{bmatrix}$$

$$\det(S) = -\frac{k_1^3}{A^2T^3} \neq 0$$

Med en tillståndsåterkoppling $u = -Lx + r$ $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$ fås det slutna systemets dynamik

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} - \frac{k_1 l_1}{T} & -\frac{k_1 l_2}{T} & -\frac{k_1 l_3}{T} \\ \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix} v$$

Antag nu att vi valt tillståndsåterkopplingen L så att systemet är stabilt (alla poler i VHP), då kommer systemet nå ett stationärt tillstånd där $\dot{x} = 0$. Då gäller att

$$q = \frac{k_1}{1 + k_1 l_1} \left(-l_2 h - l_3 z + r\right)$$

$$q = -v$$

$$h = r$$

De två sista ekvationerna säger just att inflöded är lika med utflödet, och att höjden i tanken är lika med referensnivån, och alltså är det statiska felet noll,

$$e = r - y = r - h = r - r = 0$$