Övning 10

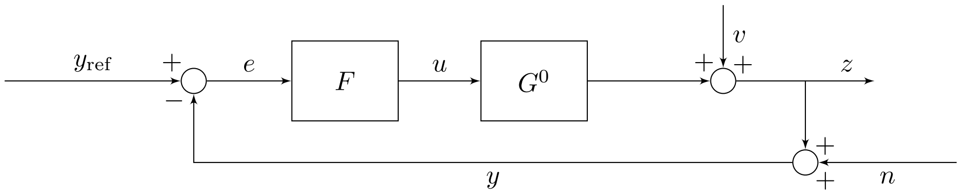
Introduktion

Varmt välkomna till tionde övningen i Reglerteknik AK!

Håkan Terelius hakante@kth.se

Repetition

Modelleringsfel



$$Z(s) = \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}}_{G_C(s)} Y_{\text{ref}}(s) + \underbrace{\frac{1}{1+G(s)F(s)}}_{S(s)} V(s) - \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}}_{T(s)} N(s)$$

Överföringsfunktionerna är *slutna systemet* $G_C(s)$ från referenssignalen, *känslighetsfunktionen* $S(s)$ från störsignalen v, samt den *komplimentära känslighetsfunktionen* $T(s)$ från mätbruset n.

Det algebraiska villkoret

$$S(s) + T(s) = 1$$

förhindrar att både störningar och mätbrus undertrycks samtidigt.

Dessutom har vi modellfel till systemet $G(s)$, där det verkliga systemet ges av överföringsfunktion $G^0(s)$. Vi introducerar det relativa modellfelet $\Delta_G(s)$ genom

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$$

Robusthetskriteriet

Robusthet beskriver ett systems tolerans mot modellfel, och robusthetskriteriet är ett *tillräckligt* villkor för att det verkliga återkopplade systemet ska vara stabilt. Antag att

- regulatorn $F(s)$ stabiliserar modellen $G(s)$,
- modellen $G(s)$ och det verkliga systemet $G^0(s)$ har samma antal poler i HHP,
- att $F(s)G(s) \to 0$ och $F(s)G^0(s) \to 0$ då $|s| \to \infty$,
- att
$$|\Delta_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall \omega$$

Då är även det slutna systemet som erhålls när G^0 återkopplas med F stabilt.

Teori

Tillståndsåterkoppling

I tillståndsbeskrivningen införde vi tillståndsvariabler x för att beskriva ett systems interna tillstånd. Systemets dynamik formuleras som ett system av första ordningens differentialekvationer

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

I tillståndsåterkopplingen låter vi insignalen u styras av systemets tillstånd x istället för utsignalen y

$$u(t) = r(t) - Lx(t)$$

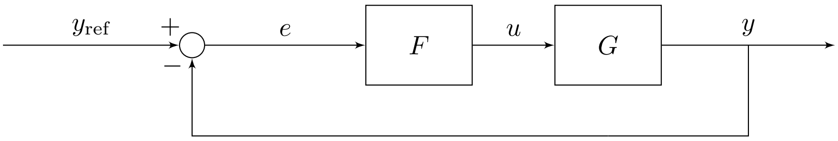


Figure 1: Återkopplat system

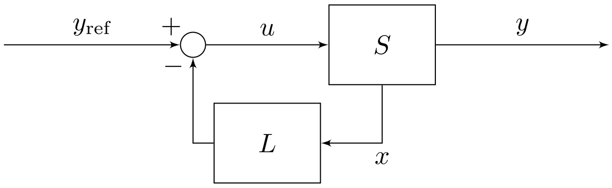


Figure 2: Tillståndsåterkoppling

Om det öppna systemet beskrivs av

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

så fås det slutna systemet

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + B\left(r(t) - Lx(t)\right) = (A - BL)x(t) + Br(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Polerna till det slutna systemet ges av egenvärdena till $A - BL$.

Styrbarhet

> För varje tillstånd x^*, existerar det en insignal $u(t)$ som för systemets tillstånd x från origo till x^* i ändlig tid?

I så fall sägs systemet vara *styrbart*.

Styrbarhet är också ekvivalent med att man med L kan välja det slutna systemets poler fritt.

Definiera *styrbarhetsmatrisen* $S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$. Kolumnerna till styrbarhetsmatrisen spänner upp de styrbara tillstånden, och systemet är då styrbart om

$$\det(S) \neq 0$$

$$\text{rank}(S) = n$$

Observatör

I tillståndsåterkopplingen gjordes återkopplingen direkt på systemets tillstånd x, som måste mätas. Om tillståndet inte går att mäta direkt så skattas det från utsignalen y med hjälp av en *observatör*.

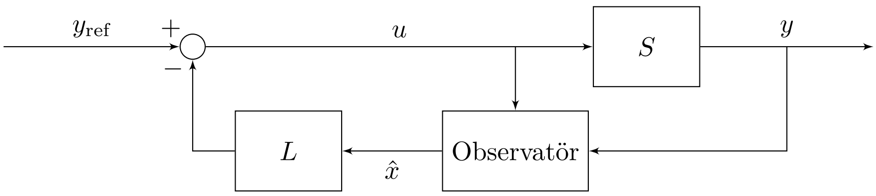


Figure 3: Tillståndsåterkoppling med observatör

Observatören försöker få tillståndsskattningen $\hat{x}$ att gå mot det verkliga tillståndet x. Vi återkopplar våran modell med felet i skattningen, $y(t) - C\hat{x}(t)$, vilket ger oss observatörens tillståndsekvation

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

Polerna till observatören ges av egenvärdena till $A - KC$, och avgör hur fort skattningsfelet går mot noll.

Vi vill att observatören ska vara snabbare än systemet, alltså att observatörens poler är längre ut i VHP än polerna till det slutna systemet.

Notera att observatören designas oberoende av tillståndsåterkopplingen.

Observerbarhet

> Finns det något initialvärde $x_0 \neq 0$ så att utsignalen är identiskt noll $y(t) \equiv 0$ då insignalen är identiskt noll $u(t) \equiv 0$?

I så fall sägs systemet vara **icke** *observerbart*.

Observerbarhet är ekvivalent med att man med K kan välja observatörens poler fritt.

Definiera *observerbarhetsmatrisen* $O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$. Nollrummet till observerbarhetsmatrisen spänner upp de icke observerbara tillstånden, och systemet är då observerbart om

$$\det O \neq 0$$

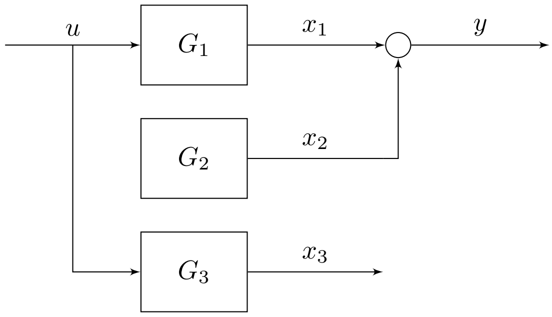


Figure 4: Icke styrbara/observerbara tillstånd

Styrbar kanonisk form

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

kan skrivas på tillståndsformen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} x(t)$$

Denna tillståndsbeskrivning är styrbar!

Observerbar kanonisk form

Överföringsfunktionen kan också skrivas på tillståndsformen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Denna tillståndsbeskrivning är observerbar!

Minimal realisation

En tillståndsbeskrivning som är både styrbar och observerbar är en minimal realisation av systemet.

Det innebär också att det inte finns någon tillståndsbeskrivning som har samma överföringsfunktion, men med lägre dimension på tillståndsvektorn.

Problem 8.13

8.13 a)

Sätter vi in värdena på $l = m = g = 1$ för första pendeln, och $l = \alpha$, $m = g = 1$ för andra pendeln får vi differentialekvationerna

$$\ddot{z}\cos\phi_1 + \ddot{\phi}_1 = \sin\phi_1$$

$$\ddot{z}\cos\phi_2 + \alpha\ddot{\phi}_2 = \sin\phi_2$$

Vi linjäriserar kring den (instabila) jämviktspunkten $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Titta på Taylor-utvecklingen för sinus och cosinus

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \approx x \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \approx 1 \end{aligned}$$

Linjäriseringen ger oss alltså differentialekvationerna

$$\ddot{z} + \ddot{\phi}_1 \approx \phi_1$$

$$\ddot{z} + \alpha\ddot{\phi}_2 \approx \phi_2$$

Låt oss nu definiera tillståndsvariablerna $x_1 = \phi_1$, $x_2 = \dot{\phi}_1$, $x_3 = \phi_2$ och $x_4 = \dot{\phi}_2$, samt insignalen $u = \ddot{z}$. Vi har då att

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\phi}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \phi_1 - \ddot{z} = x_1 - u \\ \dot{x}_3 &= \dot{\phi}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\alpha}(\phi_2 - \ddot{z}) = \frac{1}{\alpha}(x_3 - u) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} u(t)$$

8.13 b)

För att bestämma styrbarheten tittar vi på styrbarhetsmatrisen

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet är styrbart om $\det S \neq 0$,

$$\det S = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha^4}$$

Så systemet är styrbart om och endast om $\alpha \neq 1$, vilket motsvarar att de båda pendlarna har samma längd.

Den fysikaliska tolkningen är att om pendlarna är lika långa så är deras dynamik identisk, och då går de inte att styra oberoende av varandra.

Problem 8.10

Vi tittar på styrbarhetsmatrisen

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

och observerbarhetsmatrisen

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

De styrbara tillstånden spänns upp av kolumnerna till S, och dimentionsen är alltså $\operatorname{rank}(S)$, medans de icke observerbara tillstånden är nollrummet till O, och dimensionen är alltså $n - \operatorname{rank}(O)$.

8.10 a)

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -6 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(S) = 2$$

6 gånger första kolumnen, plus 5 gånger andra kolumnen är lika med minus tredje kolumnen, så de styrbara tillstånden spänns exempelvis upp av de två första kolumnerna.

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1.5 \\ -2 & -3 & -1.5 \\ 4 & 3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$n - \text{rank}(O) = 3 - 2 = 1$$

2 gånger sista kolumnen är minus andra kolumnen, så nollrummet spänns upp av vektorn

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

8.10 b)

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 16 \\ -2 & 8 & -32 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(S) = 2$$

och de styrbara tillstånden spänns exempelvis upp av de två första kolumnerna.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ -9 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n - \text{rank}(O) = 3 - 2 = 1$$

Nollrummet spänns upp av vektorn

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problem 9.1

9.1 a)

Vi använder tillståndsåterkoppling

$$u(t) = r(t) - Lx(t)$$

så det slutna systemet blir på formen

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & (A - BL)x(t) + Br(t) \\ y(t) = & Cx(t) \end{cases}$$

där systemets poler ges av egenvärdena till $A - BL$. Notera att matrisen L är en 1×2 matris, och kan alltså skrivas

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$$

Vi har då att

$$A - BL = \begin{bmatrix} -2 - l_1 & -1 - l_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polerna ges från den karakteristiska ekvationen

$$0 = \det\left(\lambda I - (A - BL)\right) = \lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + 1 + l_2$$

Om systemet har poler i p_1 och p_2 så skulle det motsvara den karakteristiska ekvationen

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1 p_2 = 0$$

och vi kan alltså välja polerna genom att sätta $l_1 = -p_1 - p_2 - 2$ och $l_2 = p_1 p_2 - 1$.

Att vi kan välja polplacering fritt innebär också att systemet är styrbart, vilket vi också kan se från styrbarhetsmatrisen

$$S = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det S = 1 \neq 0$$

Notera att ju längre ut i VHP som polerna ligger, desto större l_1 och l_2 vilket också innebär att en större insignal kommer behövas.

I) Med poler i -3 och -5 fås $l_1 = 3 + 5 - 2 = 6$ och $l_2 = 3 * 5 - 1 = 14$.

$$L = \begin{bmatrix} 6 & 14 \end{bmatrix}$$

II) Med poler i -10 och -15 fås $l_1 = 10 + 15 - 2 = 23$ och $l_2 = 10 * 15 - 1 = 149$.

$$L = \begin{bmatrix} 23 & 149 \end{bmatrix}$$

9.1 b)

Om vi inte kan göra en tillståndsåterkoppling direkt från systemets tillstånd så försöker vi skatta systemets tillståndet med hjälp av en observatör. Observatören har tillståndsekvationen

$$\dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

där observatörens poler ges av egenvärdena till $A - KC$. Notera att matrisen K är en 2×1 matris, och kan alltså skrivas

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Vi kan först testa att systemet är observerbart,

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det O = -1 \neq 0$$

vilket innebär att vi kommer kunna placera observatörens poler fritt.

Vi vill att observatören ska vara snabbare (poler längre ut i VHP) än systemet, dock ger en ökad snabbhet också känslighet mot brus. Vi väljer exempelvis observatörens poler som en dubbelpol i -20 för att vara snabbare än både I) och II).

$$A - KC = \begin{bmatrix} -2 - k_1 & -1 \\ 1 - k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Polerna ges från den karakteristiska ekvationen

$$0 = \det\left(\lambda I - (A - KC)\right) = \lambda^2 + (2 + k_1)\lambda + 1 - k_2$$

Med dubbelpolen i -20 så blir karakteristiska ekvationen

$$0 = (\lambda - (-20))^2 = \lambda^2 + 40\lambda + 400$$

Vi identifierar koefficienterna $k_1 = 38$ och $k_2 = -399$.

$$K = \begin{bmatrix} 38 \\ -399 \end{bmatrix}$$