Övning 6

Introduktion

Varmt välkomna till sjätte övningen i Reglerteknik AK!

Håkan Terelius hakante@kth.se

Repetition

Nyquistkriteriet

Vi är intresserade av det slutna systemets poler, men oftast är det enklare att arbeta med det öppna systemet. Nyquistkriteriet använder argumentvariationsprincipen för att ge ett villkor på det öppna systemet som garanterar stabilitet för det slutna systemet.

Låt kurvan γ omsluta HHP (motsols), och uteslut poler på imaginära axeln. Betrakta avbildningen av kurvan γ med hjälp av G_O.

Låt P_O vara antalet poler till G_O i HHP, och P_C antalet poler till G_C i HHP. Då är

$$P_C = P_O + \text{antal varv kurvan gör kring -1}$$

Observera att varven alltid räknas med tecken! Positivt för varv som går motsols, negativt för varv som går medsols.

Teori

Superposition

För linjära system G gäller superposition, d.v.s. att en linjärkombination av insignaler ger samma linjärkombination av utsignaler. Om $y_1(t)$ är utsignalen för insignal $u_1(t)$ och $y_2(t)$ är utsignalen för insignal $u_2(t)$ så är $ay_1(t) + by_2(t)$ utsignalen för insignalen $au_1(t) + bu_2(t)$.

Med hjälp av fourierserier kan insignalerna approximeras som en summa av sinus och cosinus funktioner.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

eller

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Frekvenssvar

Frekvenssvaret är utsignalen då insginalen är en sinusvåg med frekvens ω och amplitud A,

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega t).$$

Utsignalen blir (efter att transienter har försvunnit)

$$y(t) = |G(i\omega)| \cdot A \cdot \sin(\omega t + \arg(G(i\omega)))$$

Utsignalen har alltså samma frekvens som insignalen, men förstärks med faktorn $|G(i\omega)|$ och fasförskjuts med $\arg(G(i\omega))$.

För att bestämma frekvenssvaret är vi alltså intresserade av förstärkningen $|G(i\omega)|$ och fasförskjutingen $\arg(G(i\omega))$ för olika frekvenser ω.

Bodediagram

I ett Bodediagram ritar man upp en beloppskurva $|G(i\omega)|$ och en faskurva $\arg(G(i\omega))$ som funktioner av frekvensen ω. Oftast används en $\log - \log$ plot för att få med ett brett spektrum av värden. För beloppskurvan används ofta decibelskala (dB) där värdet i dB ges av $20 \log_{10} |G(i\omega)|$.

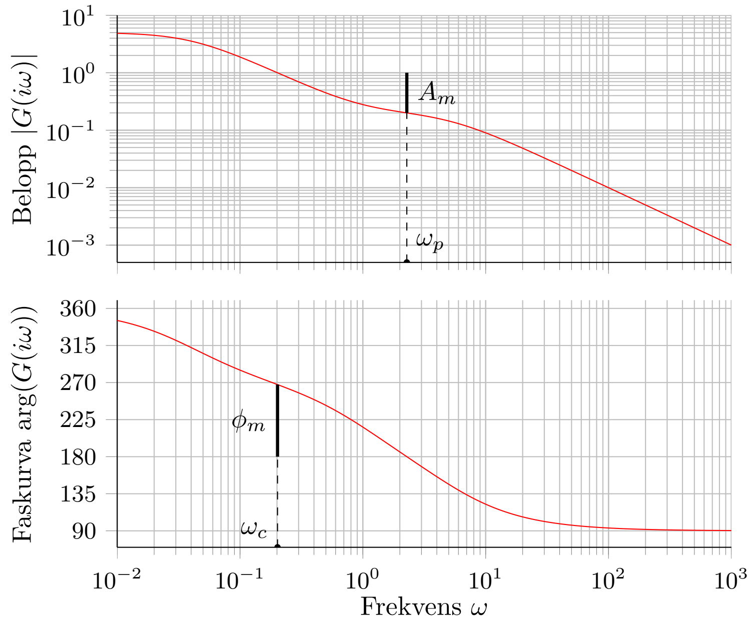

Figure 1: Bodediagram

Skärfrekvensen ω_c i öppna systemet G_O

- Bode: Den frekvens ω där beloppskurvan skär 1
- Nyquist: Den frekvens ω där Nyquistkurvan skär enhetscirkeln
- Omvänt proportionell mot stigtiden $\sim \frac{1}{T_r}$

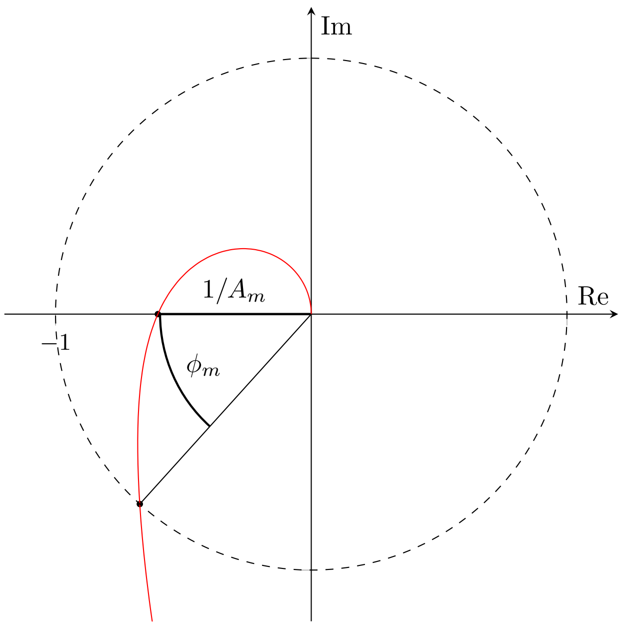

Figure 2: Nyquistdiagram

Fasskärfrekvensen ω_p i öppna systemet G_O

- Bode: Den frekvens ω där faskurvan skär $-180°$
- Nyquist: Den frekvens ω där Nyquistkurvan skär negativa reella axeln

Fasmarginal ϕ_m i öppna systemet G_O

- Ett mått på hur mycket faskurvan kan förskjutas innan instabilitet uppstår
- Bode: Faskurvans avstånd till $-180°$ vid $\omega = \omega_c$
- Nyquist: Vinkeln mellan negativa reella axeln och den punkt där Nyquistkurvan skär enhetscirkeln
- Stor fasmarginal, bra dämpat system

Amplitudmarginal A_m i öppna systemet G_O

- Ett mått på hur mycket amplitudkurvan kan höjas innan instabilitet uppstår
- Bode: Amplitudkurvans avstånd till 1 vid $\omega = \omega_p$
- Nyquist: Inversa avståndet från origo till den punkt där Nyquistkurvan skär negativa reella axeln

Resonanstopp M_p i slutna systemet G_C

- Högsta värdet på förstärkningen
- Omvänt proportionell mot relativa dämpningen $\sim \frac{1}{\zeta}$

Resonansfrekvensen ω_r i slutna systemet G_C

- Frekvensen vid resonanstoppen
- Frekvensen för svängningar hos stegsvaret

Bandbredden ω_B i slutna systemet G_C

- Frekvensen där beloppskurvan går under $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (-3 dB)
- Om $G_C(0) \neq 1$ så definieras bandbredden så att $|G_C(i\omega_b)| < |G_C(0)|/\sqrt{2}$
- Omvänt proportionell mot stigtiden $\sim \frac{1}{T_r}$

Skiss av Bodediagram

Låt överföringsfunktionen till systemet vara faktoriserad på formen

$$G(s) = K \frac{(1 + \frac{s}{z_1})(1 + \frac{s}{z_2}) \cdots (1 + \frac{s}{z_m})}{s^p (1 + \frac{s}{p_1})(1 + \frac{s}{p_2}) \cdots (1 + \frac{s}{p_n})}$$

- p är antalet poler i origo
- m är antalet nollställen
- n är antalet poler skilda från origo

1. Lågfrekvensasymptot är de termer som dominerar för små ω, $\frac{K}{s^p}$
2. Högfrekvensasymptot är de termer som dominerar för stora ω, $\frac{Kp_1p_2 \cdots p_n}{z_1z_2 \cdots z_m} s^{m-p-n}$
3. Brytpunkter är där $\omega = z_1, z_2, \ldots, z_m, p_1, p_2, \ldots, p_n$
   Varje pol ger -1 i bidrag till lutningen
   Varje nollställe ger $+1$ i bidrag till lutningen
4. Rita amplitudkurvan
5. Beräkna $\arg(G(i\omega))$ för några ω, och rita faskurvan

Problem 4.1

Det är sagt att termometern kan beskrivas som ett första ordningens linjärt system, så vi ansätter $G(s) = \frac{a}{s+b}$ för några konstanter a, b.

Vi vet också att utsignalen från ett LTI (Linear Time Invariant, Linjära TidsInvarianta) system blir en sinusvåg om insignalen är en sinusvåg, och att

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = |G(i\omega)| \cdot A \cdot \sin(\omega t + \arg(G(i\omega)))$$

Låt oss först bestämma frekvensen ω för signalerna från figuren: Periodtiden är $T = 0.314$ min, och vinkelfrekvensen alltså $\omega = \frac{2\pi}{T} = 20$ rad/min $= \frac{1}{3}$ rad/s.

Vidare ser vi i figuren att tidsförskjutningen är 0.056 min, så fasförskjutningen är $\arg(G(i\omega)) = -2\pi\frac{0.056}{0.314} = -1.12$ rad. Förstärkningen får vi från figuren till $|G(i\omega)| = \frac{0.9}{2} = 0.45$.

Låt oss nu bestämma parametrarna a och b för systemet.

$$|G(i\omega)| = \left| \frac{a}{\frac{1}{3}i + b} \right| = \frac{3a}{\sqrt{1 + 9b^2}}$$

$$\arg(G(i\omega)) = \arg\left(\frac{a}{\frac{1}{3}i + b}\right) = \arg(a) - \arg\left(\frac{1}{3}i + b\right) = -\arctan\left(\frac{1}{3b}\right)$$

Lös ut a och b så fås $a = 0.17$ och $b = 0.16$, och alltså är överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{0.17}{s + 0.16}$$

Problem 4.2

4.2 a)

Bestäm först det öppna systemets överföringsfunktion $G_O(s) = F(s)G_r(s)G_s(s)$.

$$F(s) = K\frac{1 + \frac{s}{a}}{1 + \frac{s}{b}}, \quad a = 0.02, b = 0.05$$

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + sT_2}$$

$G_s(s)$ fås från differentialekvationerna, där $\Psi(s) = G_s(s)\Delta(s)$,

$$\omega = \dot{\Psi} \quad \Rightarrow \quad \Omega(s) = s\Psi(s)$$

$$T_1\dot{\omega} = -\omega + K_1\delta \quad \Rightarrow \quad T_1 s\Omega(s) = -\Omega(s) + K_1\Delta(s)$$

Vilket ger

$$\Psi(s) = \underbrace{\frac{K_1}{s(1 + sT_1)}}_{G_s(s)} \Delta(s)$$

Det öppna systemet blir således

$$G_O(s) = KK_1 \frac{\left(1 + \frac{s}{a}\right)}{s\left(1 + \frac{s}{b}\right)\left(1 + \frac{s}{1/T_2}\right)\left(1 + \frac{s}{1/T_1}\right)}$$

Lågfrekvensasymptoten $G_O(i\omega)$ där $\omega \to 0$ blir $\frac{KK_1}{i\omega}$, och har alltså lutningen -1 i loglog-diagrammet.

Högfrekvensasymptoten $G_O(i\omega)$ där $\omega \to \infty$ blir $\frac{KK_1 b}{aT_1T_2(i\omega)^3}$, och har alltså lutningen -3 i loglog-diagrammet.

Brytpunkterna finns vid nollstället $\omega = a = 0.02$, och vid polerna $\omega = b = 0.05$, $\omega = \frac{1}{T_1} = 0.01$ och $\omega = \frac{1}{T_2} = 0.1$.

ω	0	$\frac{1}{T_1} = 0.01$	$a = 0.02$	$b = 0.05$	$\frac{1}{T_2} = 0.1$
Typ	Lågfrekvens	Pol	Nollställe	Pol	Pol
Lutning	-1	-2	-1	-2	-3

4.2 b)

Hur förändras Bodediagrammet då K ändras? $\arg K = 0$ så faskurvan ändras inte, men $|K| = K$, så beloppskurvan skalas om.

Kritiska punkten är då faskurvan är $-180°$, d.v.s. vid skärfrekvensen ω_c. Titta på Bodediagrammet, så ser vi att skärfrekvensen är $\omega_c = 0.06$ rad/s, och beloppet är $|G_O(i\omega_c)| \approx 0.24$. Det innebär att amplitudmarginalen är $A_m = \frac{1}{0.24} \approx 4.2$, så vi kan alltså skala upp K-värdet med en faktor 4.2 innan systemet blir instabilt. I Bodediagrammet var $K = 0.5$, så det maximala K-värdet är $K_{\max} = 0.5 \cdot 4.2 = 2.1$.

Periodtiden T fås från (vinkel)frekvensen som $T = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{0.06} \approx 105$ s.

4.2 c)

Vi tittar nu på det slutna systemet $G_C(s) = \frac{G_O(s)}{1+G_O(s)}$, och vet att sinus-signaler bevaras som sinus-signaler med samma frekvens.

$$u(t) = A \cdot \sin \omega t \Rightarrow y(t) = |G_C(i\omega)| \cdot A \cdot \sin\left(\omega t + \arg G_C(i\omega)\right)$$

I uppgiften har vi att $\omega = \alpha = \beta = 0.02$. Vi kan nu antingen bestämma $G_O(i0.02)$ från Bodediagrammet, eller direkt $G_C(i0.02)$ från det algebraiska uttrycket. Vi får fram att $|G_C(i0.02)| \approx 1.6$ och $\arg G_C(i0.02) = -0.76$ rad. Amplituden på insignalen var $A = 5°$, vilket ger amplituden på utsignalen $B = A \cdot \frac{1}{T_1} = 8°$. Fasförskjutningen är $\phi = \arg G_C(i0.02) = -0.76$.

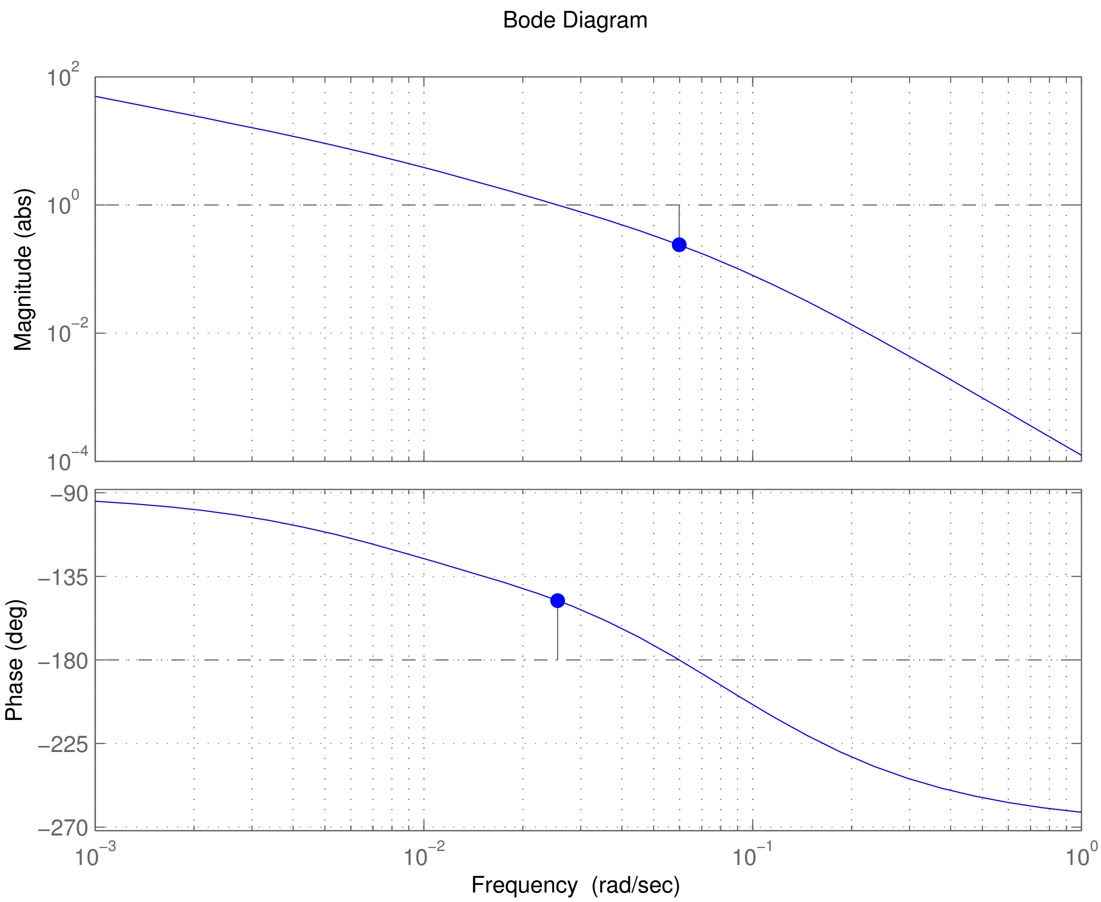

Figure 3: Bodediagram för 4.2

Problem 5.8

5.8 a)

Det öppna systemet är $G_O(s) = G_1(s)e^{-sT}$, och vi har fått Bodediagrammet för $G_1(s)$ i figuren. Hur förändras Bodediagrammet av tidsfördröjningen e^{-sT}?

$$|G_O(i\omega)| = |G_1(i\omega)| \cdot \underbrace{|e^{-i\omega T}|}_{=0} = |G_1(i\omega)|$$

så beloppskurvan ändras inte av tidsfördröjningen.

$$\arg G_O(i\omega) = \arg G_1(i\omega) + \underbrace{\arg e^{-i\omega T}}_{=-\omega T} = \arg G_1(i\omega) - \omega T$$

så faskurvan minskas med ωT.

Tittar på skärfrekvensen ω_c där $|G_O(i\omega_c)| = |G_1(i\omega_c)| = 1$. Från figuren får vi att $\omega_c = 1$ rad/s, och fasmarginalen ϕ_m^1 för det ursprungliga systemet G_1 är $\phi_m^1 = 40° = 0.698$ rad.

Fasmarginalen för det nya systemet är $\phi_m = \phi_m^1 - T\omega_c = 0.698 \text{ rad } - T \text{ rad/s} > 0$, alltså måste vi ha en tidsfördröjing $T < 0.698$ s.

Problem 4.4

Först tittar vi på slutvärdet, och använder slutvärdessatsen

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\underbrace{U(s)}_{\frac{1}{s}} = G(0)$$

I diagrammen ser vi att stegsvar A, C och D har 1 som slutvärde, och Bodediagrammen ser vi att $\lim_{\omega\to 0}|G(i\omega)|$ är 1 för system A,B och D. Alltså kan vi börja med att para ihop

$$B - C$$

Nästa sak vi tittar på är överslängar och resonanstoppar (maximala förstärkningen). Stegsvar A och C har ungefär samma översläng, och stegsvar D har ett mindre stegsvar. Titta nu på systemens resonanstoppar, som är ungefär samma för system B och D, men mindre för system A. En större maximal förstärkning ger en större översläng, så därför parar vi ihop

$$D - A$$

Sista steget är att titta på systemets hastighet. Notera att stegsvar A är snabbare än stegsvar C, men annars så är de väldigt lika. Bodediagrammen för system B och system D har liknande form, men skiftade i sidled. Höga frekvenser motsvarar ett snabbt system, och system D har en lägre bandbredd, d.v.s. system D undertrycker (förstärkning < 1) högre frekvenser mer än system B. Vi parar alltså ihop de sista systemen

$$A - B$$

$$C - D$$

Problem 5.2

5.2 a)

Vi har fått förstärkningen och fasförskjutningen för systemet för fem olika frekvenser. För Bodediagrammet behöver vi bara rita ut punkterna.

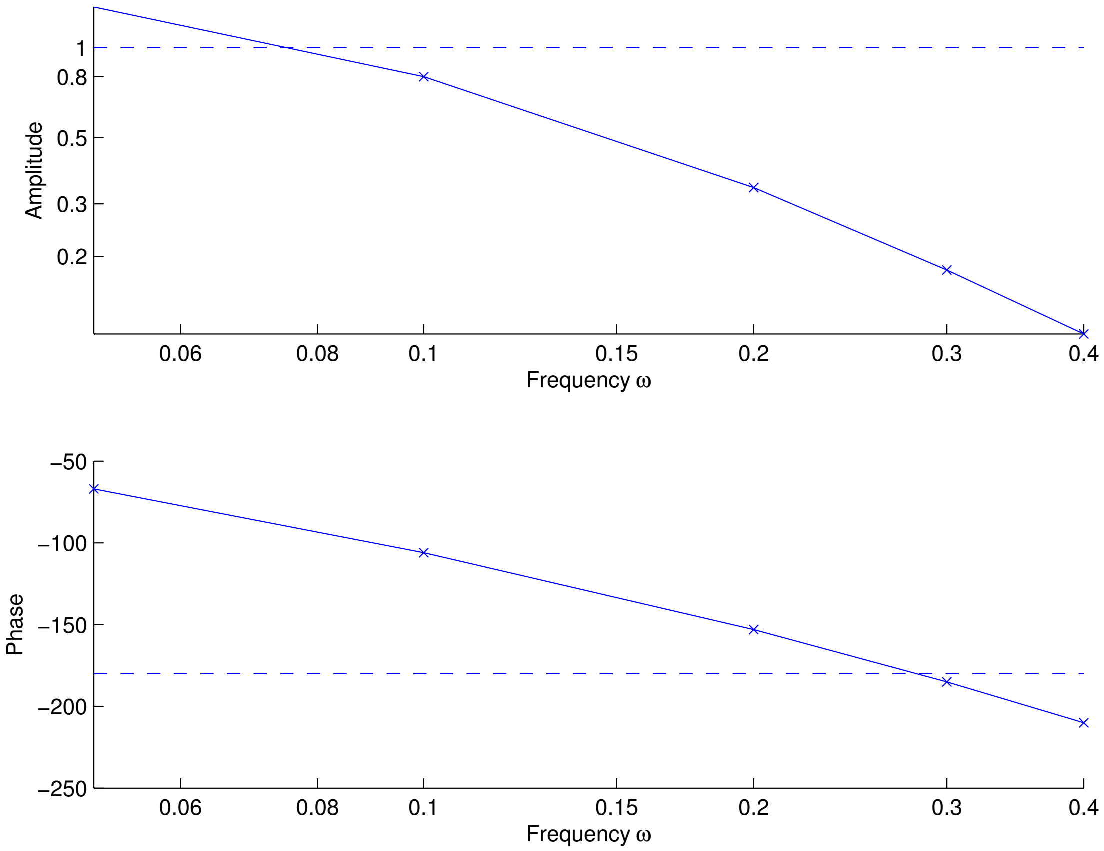

Figure 4: Bodediagram för 5.2

5.2 b)

Med en proportionell regulartor ändras enbart beloppskurvan, och skärfrekvensen ω_c är där beloppskurvan $|G(i\omega_c)| = 1$. Med den proportionella regulatorn kan vi alltså välja skärfrekvens ω_c fritt, och ett högre K-värde ger en högre skärfrekvens, men samtidigt en sämre fasmarginal ϕ_m.

Villkoret vi har fått är att fasmarginalen $\phi_m \geq 50°$, eller att fasen $\arg G(i\omega_c) > -130°$. Vi ser att fasen är ungefär $-130°$ vid frekvensen $\omega = 0.15$ rad/s, och villkoret är alltså att skärfrekvensen måste vara mindre än $\omega_c \leq 0.15$ rad/s.