Övning 3

Introduktion

Varmt välkomna till tredje övningen i Reglerteknik AK!

Håkan Terelius hakante@kth.se

Nästa gång är det datorövning. Kontrollera att ni kan komma in i XQ-salarna. Endast en kort genomgång, sedan hjälper vi till och svarar på frågor då ni arbetar på med övningarna.

Repetition

Återkopplade system

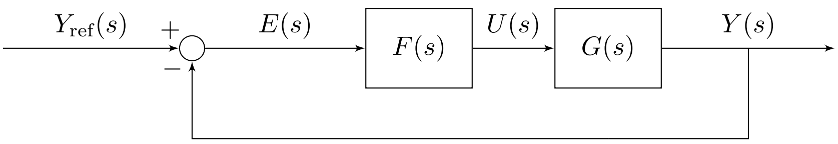

Figure 1: Återkopplat system

Öppna systemet

$$G_O(s) = G(s)F(s)$$

Slutna systemet

$$G_C(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)}$$

PID-regulatorn

$$\begin{aligned} u(t) =& K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \\ U(s) =& F(s)E(s) \\ F(s) =& K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s \end{aligned}$$

Teori

Relativ dämpning

Betrakta ett andra ordningens system utan nollställen, överföringsfunktionen kan då skrivas

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

Systemet är stabilt om $a, b > 0$. Vi gör variablebytet $\omega_0 = \sqrt{b}$ och $\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}}$

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Systemets poler där nämnaren till $G(s)$ är 0.

$$s = -\omega_0\zeta \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Om $\zeta < 1$ så har $G(s)$ komplexa poler,

$$s = -\omega_0\zeta \pm i\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

ω_0 är avståndet från polerna till origo.

$$|s - 0| = \sqrt{(\omega_0\zeta)^2 + (\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2})^2} = \sqrt{\omega_0^2} = \omega_0$$

ω_0 är en tidsskalning av systemet. Större ω_0, större avstånd till polerna, snabbare system.

ζ kallas för *relativ dämpning.*

Från figur fås att $\cos(\phi) = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusan}} = \frac{\omega_0\zeta}{\omega_0} = \zeta$.

$\zeta = \cos(\phi)$ ger stegsvarets kvalitativa dämpning.

Större ζ, mindre ϕ, mindre $\frac{|\text{Im-del}|}{|\text{Re-del}|}$, bättre dämpat.

Rotort

Som vi tidigare sett är polernas placering avgörande för systemets egenskaper. Rotorten är ett sätt att visa polernas lägen som funktion av en parameter (K).

Normalt tittar vi på det slutna systemet $G_C(s)$.

1. Bestäm $G_C(s)$
2. Identifiera nämnaren till $G_C(s)$ på formen $P(s) + KQ(s)$. Poler där $P(s) + KQ(s) = 0$. Graden n på $P(s)$ ska vara större eller lika med graden m på $Q(s)$.

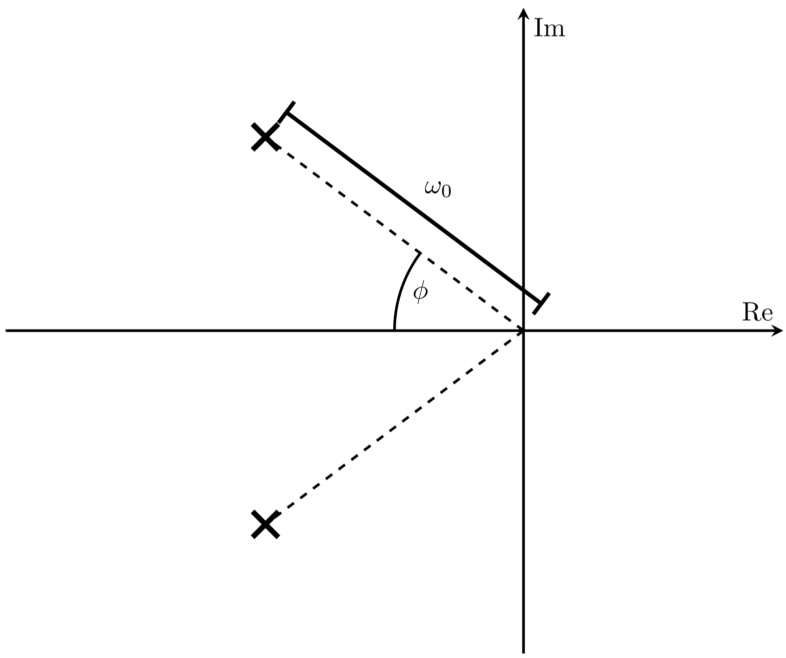

Figure 2: Relativ dämpning

3. Hitta startpunkter
$$K = 0 \Leftrightarrow P(s) = 0$$
Det finns n startpunkter
4. Hitta slutpunkter
$$K \to \infty \Leftrightarrow Q(s) \to 0$$
Det finns m slutpunkter.
5. Bestäm antalet asymptoter
$$\#\text{asymptoter} = n - m$$
6. Bestäm asymptoternas skärningspunkt med reella axeln
$$\text{Skärningspunkten} = \frac{1}{n-m}\left(\sum \text{startpunkter} - \sum \text{ändpunkter}\right)$$
7. Bestäm riktningarna på asymptoter
$$\text{Riktningar} = \frac{\pi}{n-m} + 2k\frac{\pi}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-m-1)$$
8. Bestäm eventuella skärningspunkter med imaginär-axeln

   Sätt $s = i\omega$ i $P(s) + KQ(s) = 0$, och lös ekvationen för reella värden på ω och $K \geq 0$.
9. Bestäm de delar av reella-axeln som tillhör rotorten

   De delar av reella-axeln som har ett udda antal start och ändpunkter till höger tillhör rotorten.
10. Rita rotorten!

Problem 3.3

3.3 a)

Proportionell regulator $F(s) = K_P$:

$$Y(s) = \frac{2K_P}{5s^2 + s + 2K_P} R(s) - \frac{1 + 5s}{5s^2 + s + 2K_P} V(s)$$

Polerna ges av nollställenda till nämnaren: $5s^2 + s + 2K_P = 0$. Alltså där

$$s = -0.1 \pm \sqrt{0.01 - 0.4K_P}$$

För $K_P = 0.02$ polerna är -0.055 och -0.145. Realla negativa poler: stabilt, inga oscillationer.

För $K_P = 1$ polerna är $-0.1 \pm i0.624$. Negativ realdel, men stor imaginär del: Stabilt, men stora oscillationer.

3.3 b)

Titta på polerna, systemet är stabilt för $K_P > 0$. Använd slutvärdessatsen

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

$$R(s) = \frac{5}{s}, \quad V(s) = \frac{2}{s}$$

så

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} 5\frac{2K_P}{5s^2 + s + 2K_P} - 2\frac{1 + 5s}{5s^2 + s + 2K_P} = 5 - \frac{1}{K_P}$$

Systemet kommer inte gå till referensvärdet, men närmar sig då K_P blir större. Men som vi såg i uppgift 3.3a) så blir systemet också mer svängigt.

3.3 c)

Med en PI-regulator $F(s) = K_P + K_I\frac{1}{s}$ fås

$$Y(s) = \frac{2(K_P s + K_I)}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} R(s) - \frac{s(1 + 5s)}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} V(s)$$

Antar att systemet är stabilt för valda K_P, K_I, så vi kan använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} 5\frac{2(K_P s + K_I)}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} - 2\frac{s(1 + 5s)}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} = 5$$

Så vi får inget statiskt fel (om systemet är stabilt).

3.3 d)

Med en PD-regulator $F(s) = K_P K_D s$ fås

$$Y(s) = \frac{2K_P + 2K_D s}{5s^2 + s + 2K_P + 2K_D s} R(s) - \frac{1 + 5s}{5s^2 + s + 2K_P + 2K_D s} V(s)$$

Polerna ges av nollställena till nämnaren. Med $K_P = 1$ fås karakteristisk ekvation

$$5s^2 + (1 + 2K_D)s + 2 = 0.$$

Dämpningskoefficienten hittar vi i den generella karakteristiska ekvationen

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

vilket ger oss $\zeta = \frac{0.2+0.4K_D}{2\sqrt{0.4}}$. Villkoret $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ innebär att $K_D > 1.74$.

Dvs genom att lägga till en deriverande del kan vi förbättra dämpningen, och därigenom minska överslängen.

Problem 3.6

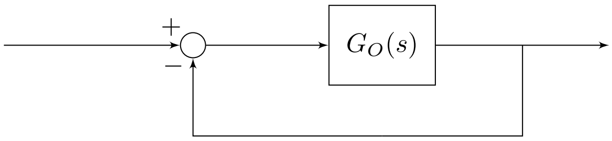

Figure 3: Slutet system

3.6 a)

$$G_O(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

1. Bestäm $G_C(s) = \frac{G_O(s)}{1+G_O(s)} = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)+K(s+2)}$
2. Identifiera nämnaren som $P(s) + KQ(s)$,
   $P(s) = s(s+1)(s+3)$, $n = 3$
   $Q(s) = s + 2$, $m = 1$
   Kontroll $n \geq m$
3. Startpunkter då $K = 0$, $P(s) = 0$.
   $s = 0$, $s = -1$, $s = -3$
4. Ändpunkter då $K \to \infty$, $Q(s) = 0$
   $s = -2$

5. Antalet asymptoter $= n - m = 2$
6. Skärningspunkt $\frac{1}{n-m}\left(\sum \text{startpunkter} - \sum \text{ändpunkter}\right) = \frac{1}{2}(-4-(-2)) = -1$
7. Riktningar på asymptoter $\frac{\pi}{n-m} + 2k\frac{\pi}{n-m} = \frac{\pi}{2} + k\pi$. $\frac{\pi}{2}$ och $\frac{3\pi}{2}$.
8. Skärning med imaginära axeln

   $P(i\omega) + KQ(i\omega) = 0$

   $$\left(-4\omega^2 + 2K\right) + i\left(-\omega^3 + (3+K)\omega\right) = 0$$

   Både Im-del och Re-del måste vara 0:

   $$\omega = \pm\sqrt{K/2} \quad \text{och} \quad \omega = \begin{cases} w = 0, \\ w = \pm\sqrt{3+K} \end{cases}$$

   Endast uppfyllt av $K = 0$
9. Bestäm de delar av reella axeln som tillhör rotorten. Start/ändpunkter i -3, -2, -1, 0. Alltså tillhör $[-3,-2]$ och $[-1,0]$ rotorten.
10. Rita rotort

- Alla poler är strikt i VHP för $K > 0$, och alltså stabilt.
- För små K är alla poler reella, och alltså fås inga svängningar
- Ökande K ger längre avstånd till origo, och alltså ett snabbare system
- Då K ökar börjar systemet tillslut att svänga.

Problem 3.7

3.7 abc)

1. Bestäm $G_C(s)$ generellt (för alla α, K).

   $$\Theta(s) = G_C(s)\Theta_{\text{ref}}(s)$$

   Följ blockdiagrammet:

   $$\Theta(s) = \dot{\Theta}(s)\frac{1}{s}$$

   $$\dot{\Theta}(s) = K\frac{k}{1+s\tau}\left(\Theta_{\text{ref}}(s) - \Theta(s) - \alpha\dot{\Theta}(s)\right)$$

   $$s\Theta(s) = K\frac{k}{1+s\tau}\left(\Theta_{\text{ref}}(s) - \Theta(s) - \alpha s\Theta(s)\right)$$

   $$\left(s + K\frac{k}{1+s\tau}(1+\alpha s)\right)\Theta(s) = K\frac{k}{1+s\tau}\Theta_{\text{ref}}(s)$$

   $$\Theta(s) = \frac{Kk}{s(1+s\tau) + Kk(1+\alpha s)}\Theta_{\text{ref}}(s)$$

   Så $G_C(s) = \frac{Kk}{s(1+s\tau)+Kk(1+\alpha s)}$.

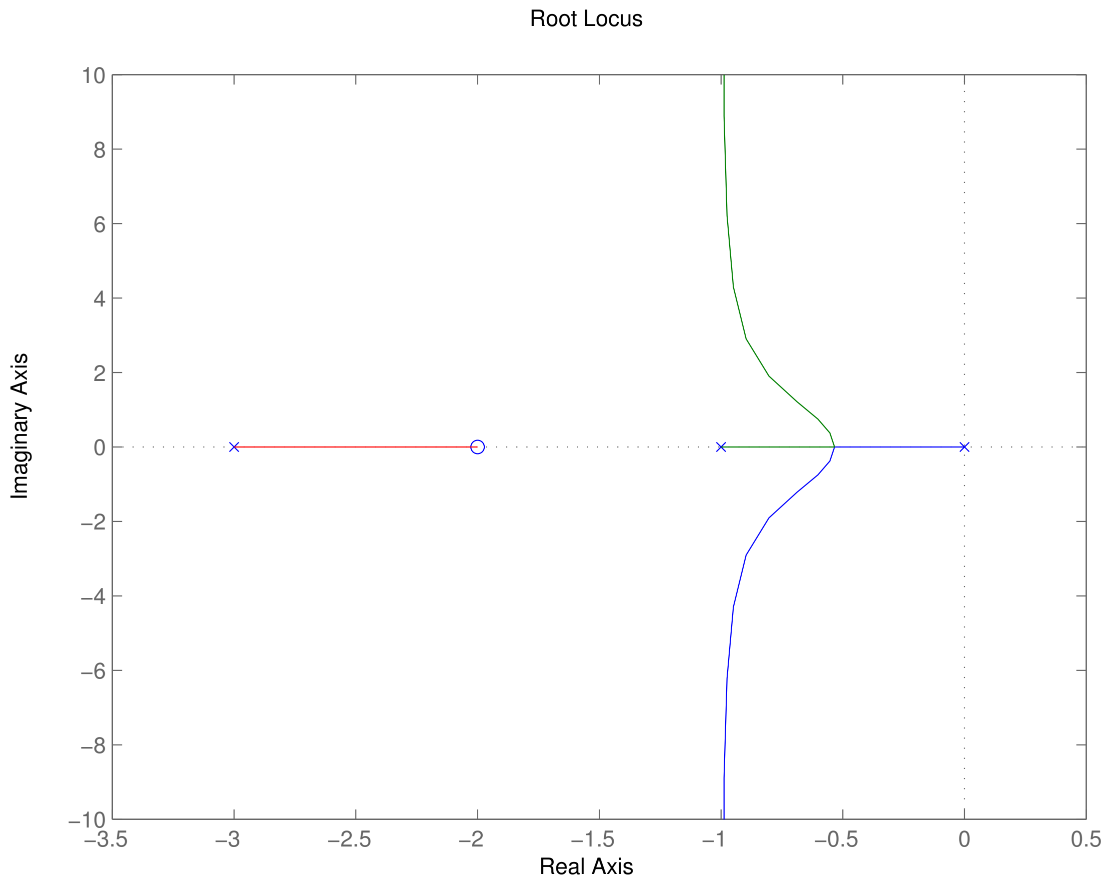

Figure 4: Rotort

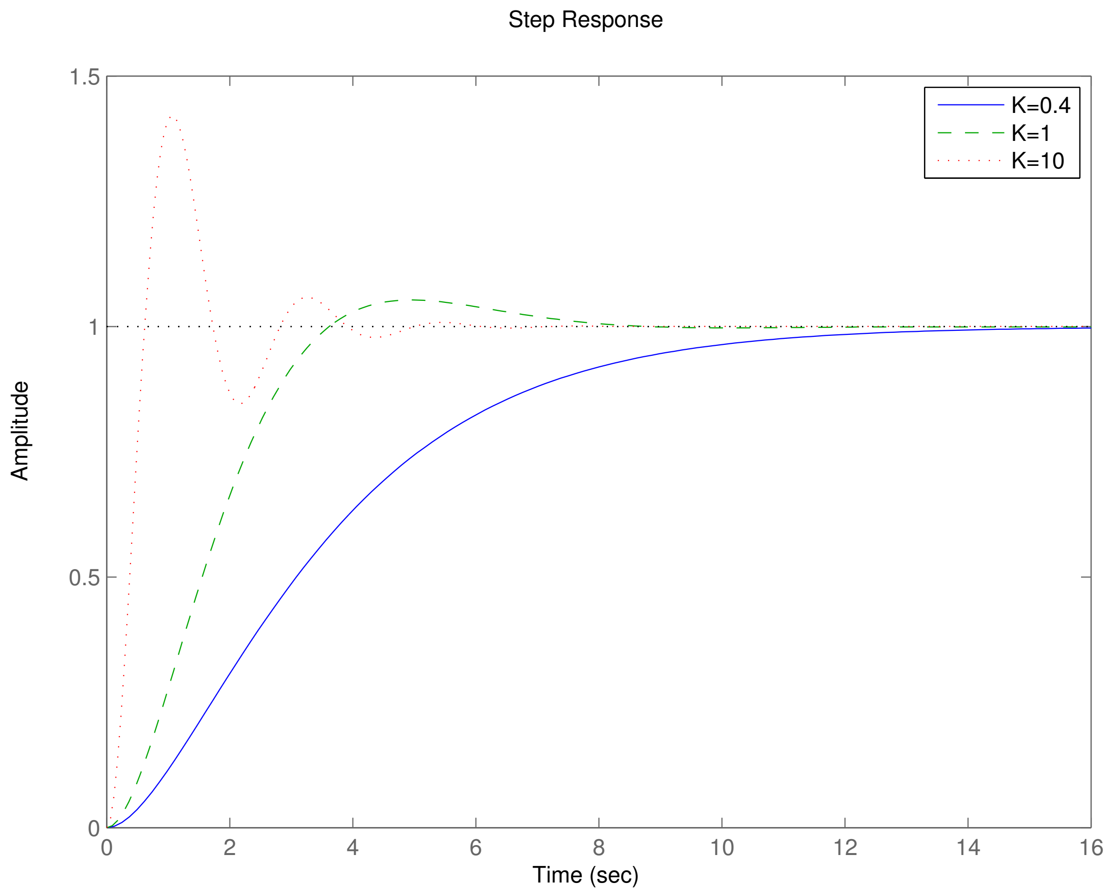

Figure 5: Stegsvar

2. Identifiera nämnaren $P(s) + KQ(s)$

$$P(s) = s(1 + s\tau), \quad Q(s) = k(1 + \alpha s)$$

3. Startpunkter där $P(s) = 0$. $s = 0$, $s = -\frac{1}{\tau} = -2$
4. Ändpunkter där $Q(s) = 0$. $s = -\frac{1}{\alpha}$ om $\alpha \neq 0$, annars så saknas ändpunkter.
5. Antalet asymptoter är

$$n - m = \begin{cases} 1 & \text{om } \alpha \neq 0 \\ 2 & \text{om } \alpha = 0 \end{cases}$$

6. Asymptoternas skärningspunkt

$$\frac{1}{n-m}\left(\sum \text{startpunkter} - \sum \text{ändpunkter}\right) = \begin{cases} -2 + \frac{1}{\alpha} & \text{om } \alpha \neq 0 \\ -1 & \text{om } \alpha = 0 \end{cases}$$

7. Asymptoternas riktningar

$$\frac{\pi}{n-m} + 2k\frac{\pi}{n-m} = \begin{cases} \pi & \text{om } \alpha \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} & \text{om } \alpha = 0 \end{cases}$$

8. Skärning med imaginära axeln

$$P(i\omega) + KQ(i\omega) = 0$$

$$(Kk - \omega^2\tau) + i\omega(1 + Kk\alpha) = 0$$

   Lösning enbart då $K = \omega = 0$
9. Bestäm de delar av reella axeln som tillhör rotorten
10. Rita rotorten

3.7 d)

2. Identifiera nämnaren $P(s) + \alpha Q(s)$

$$P(s) = s(1 + s\tau) + Kk = 0.5s^2 + s + 2, \quad Q(s) = Kks = 2s$$

3. Startpunkter där $P(s) = 0$. $s = -1 \pm i\sqrt{3}$
4. Ändpunkter där $Q(s) = 0$. $s = 0$
5. Antalet asymptoter är $n - m = 1$
6. Asymptotens skärningspunkt $\frac{1}{n-m}(\sum \text{startpunkter} - \sum \text{ändpunkter}) = -2$
7. Asymptotens riktning $\frac{\pi}{n-m} + 2k\frac{\pi}{n-m} = \pi$

8. Skärning med imaginära axeln

$$(2 - 0.5\omega^2) + i\omega(1 + 2\alpha) = 0$$

   Ingen skärning!

9. Bestäm de delar av reella axeln som tillhör rotorten

10. Rita rotorten

- Stabil för alla $K > 0$ och alla $\alpha \geq 0$.
- Utan tachometer (a) oscillerar systemet för stora K
- Större α ger bättre dämpat system.
- Med tachometern kan vi få ett snabbt och väl dämpat system. Tachometern fungerar som D-delen av en PID-regulator.

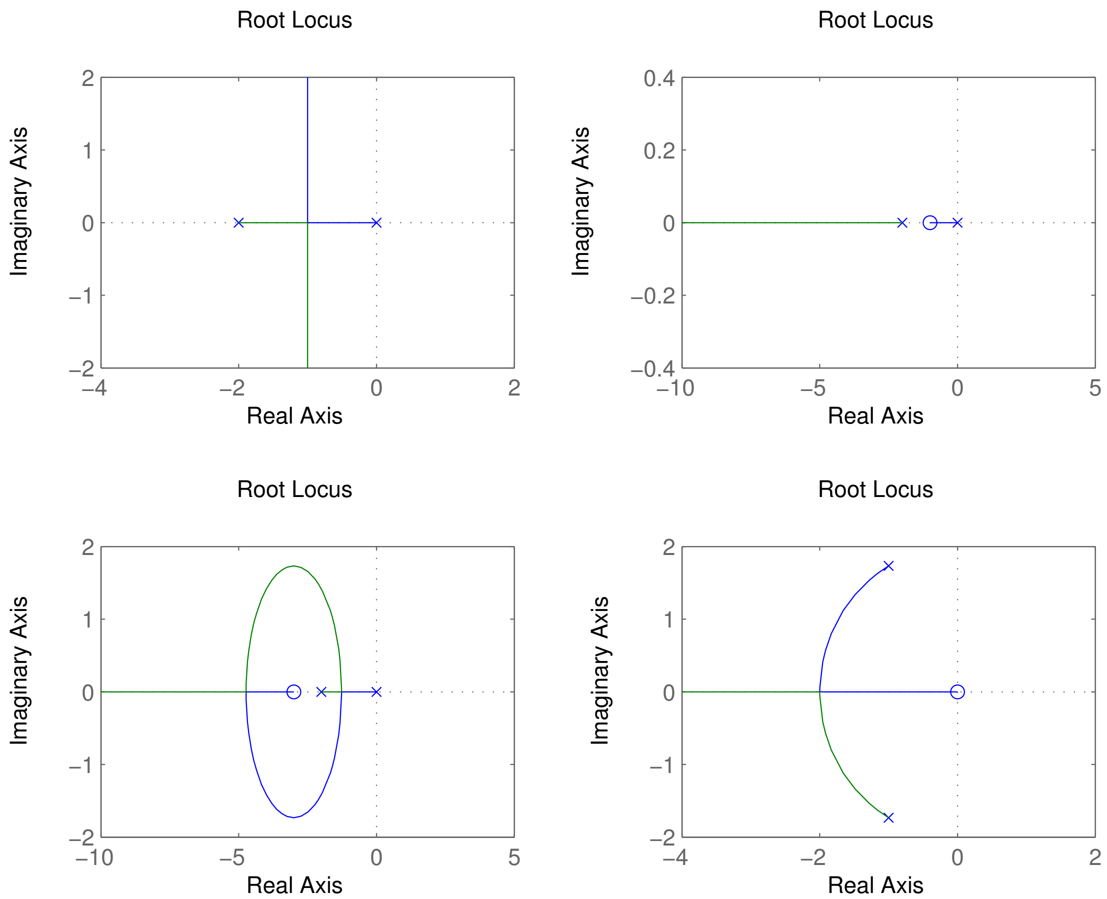

Figure 6: Rotort för uppgift 3.7