Övning 2

Introduktion

Varmt välkomna till andra övningen i Reglerteknik AK!

Håkan Terelius hakante@kth.se, F-05, doktorand i reglerteknik sedan 2010

For those who does not speak swedish, there is one group given in english

Kurmaterialet är tillgängligt på kurshemsidan

Vanliga övningar:

- Börjar med teori
- Löser sedan uppgifter ur exempelsamlingen
- Avbryt gärna och ställ frågor!!
- Finns två grupper (a,b och c,d)

Labbar:

- Första labben är snart!
- Anmälan sker på kurshemsidan
- Läs igenom lab-PM innan labben
- Det finns förberedelseuppgifter till labbarna som ska vara gjorda innan ni kommer dit
- Till andra labben är det en KS som ni måste klara av för att få göra labben

Repetition

Insignal, styrsignal $u(t)$ Det som vi kan kontrollera

Utsignal $y(t)$ Det som vi vill styra

Störsignal $v(t)$ Yttre faktorer som vi inte kan kontrollera

Laplace transformer

$$\mathcal{L}[y(t)] = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = Y(s)$$

- Tidsdomänen: $y(t)$, små bokstäver, parameter t
- Laplacedomänen: $Y(s)$, stora bokstäver, parameter s

Överföringsfunktioner

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Poler är nollställena till nämnaren av $G(s)$

- Alla poler strikt i VHP (Vänster Halv-Plan) $\Rightarrow$ Systemet är stabilt
- Någon pol strikt i HHP (Höger Halv-Plan) $\Rightarrow$ Systemet är instabilt

Nollställen är till täljaren av $G(s)$

Slutvärdessatsen

Givet ett *stabilt* system $G(s)$ (alla poler i VHP) så gäller

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Teori

Återkopplade system

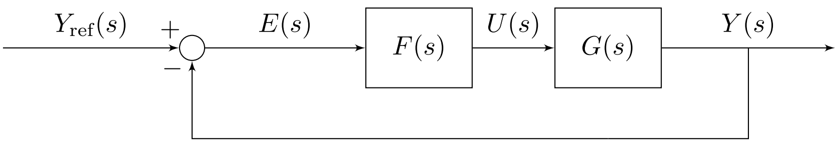

Figure 1: Återkopplat system

- Referenssignal $Y_{\text{ref}}(s)$
- Reglerfelet $E(s) = Y_{\text{ref}}(s) - Y(s)$
- Regulatorn $F(s)$ tittar på reglerfelet $E(s)$ och beräknar insignalen $U(s)$

Öppna systemet

Överföringsfunktionen från referenssignalen $Y_{\text{ref}}(s)$ till utsignalen $Y(s)$ *utan* återkoppling kallas för **öppna systemet** $G_O(s)$. Dvs överföringsfunktionen från $E(s)$ till $Y(s)$.

$$Y(s) = \underbrace{G(s)F(s)}_{G_O(s)} Y_{\text{ref}}(s)$$

$$G_O(s) = G(s)F(s)$$

Slutna systemet

Överföringsfunktionen från referenssignalen $Y_{\text{ref}}(s)$ till utsignalen $Y(s)$ *med* återkoppling kallas för **slutna systemet** $G_C(s)$.

Bestäm $G_C(s)$ från blockdiagramet:

- $Y(s) = G(s)U(s)$
- $U(s) = F(s)E(s)$
- $E(s) = Y_{\text{ref}}(s) - Y(s)$

$$Y(s) = G(s)F(s)\Big(Y_{\text{ref}}(s) - Y(s)\Big)$$

Bryt ut $Y(s)$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}}_{G_C(s)} Y_{\text{ref}}(s)$$

Överföringsfunktionen för det slutna systemet är alltså

$$G_C(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)}$$

PID-regulatorn

PID-regulatorn är en möjlig reglerstrategi. Den är en summa av tre delar:

- **P**roportionell mot reglerfelet

$$\begin{aligned} t: &\quad K_P e(t) \\ s: &\quad K_P E(s) \end{aligned}$$

  - Tittar på nuvarande fel
  - +Snabbt stegsvar
  - -Ger ett statiskt fel, $e(t) \neq 0$

- **I**ntegrerande av reglerfelet

$$\begin{aligned} t: &\quad K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \\ s: &\quad K_I \frac{1}{s} E(s) \end{aligned}$$

  - Tittar bakåt i tiden

  - +Inget statiskt fel
  - -Kan ge svängigt beteende

- **D**eriverande av reglerfelet

$$
\begin{aligned}
t: &\quad K_D \frac{de(t)}{dt} \\
s: &\quad K_D s E(s)
\end{aligned}
$$

  - Tittar frammåt i tiden
  - +Minskar svängighet
  - -Känslig för brus som kan förstärkas

Hela regulatorn blir då

$$
\begin{aligned}
u(t) =& K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \\
F(s) =& K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s
\end{aligned}
$$

Problem 3.25

Statiska felet

Med en integrator fås inget statisk fel. Stegsvar A och B har ett statisk fel, men inte stegsvar C och D. Alltså parar vi ihop systemen som

$$
\begin{aligned}
A, B &\Leftrightarrow i, iii \\
C, D &\Leftrightarrow ii, iiii
\end{aligned}
$$

Oscillationer

Den deriverande delen minskar oscillationer. Från stegsvaren ser vi att A har mindre oscillationer än B, och C har mindre oscillationer än D. Alltså borde A och C ha en deriverande del.

$$
\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow iii \\
B &\Leftrightarrow i \\
C &\Leftrightarrow iiii \\
D &\Leftrightarrow ii
\end{aligned}
$$

Problem 3.1

3.1 a)

Bestäm överföringsfunktionen $G_t(s)$ för tanken.

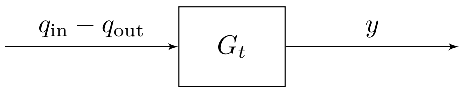

Figure 2: Tanksystemet

> Massbalansen säger att förändringen av tankens volym är lika med nettoinflödet till tanken
> $$\frac{d}{dt}V(t) = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{out}}(t)$$

Tvärsnittsarean för tanken är 1 m^2, så $V(t) = A \cdot y(t) = y(t)$

$$\frac{d}{dt}y(t) = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{out}}(t)$$

$$sY(s) = Q_{\text{in}}(s) - Q_{\text{out}}(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{G_t(s)} \Big(Q_{\text{in}}(s) - Q_{\text{out}}(s)\Big)$$

3.1 b)

Bestäm överföringsfunktionen $G_V(s) = \frac{k_V}{1+Ts}$ från *enhets* stegsvaret. Har ett steg med amplitud 1, och statiska förstärkningen är hur mycket en konstant signal förstärks.

Börja med att titta på den statiska förstärkningen $|G_V(0)| = k_V$, från diagrammet får vi $|G_V(0)| = 2$.

För att bestämma T kan vi läsa av godtycklig punkt på diagrammet. Låt oss först bestämma $y(t)$, och speciellt titta på $y(T)$.

$$Y(s) = G_V(s)U(s) = \frac{2}{1+Ts}\frac{1}{s}$$

$$y(t) = 2(1 - e^{-t/T})$$

$$y(T) = 2(1 - e^{-1}) \approx 1.26$$

Så vi kan läsa av T som tiden det tar att nå 1.26. Från figuren ser vi att det är ungefär $T = 5$.

$$G_V(s) = \frac{2}{1+5s}$$

3.1 c)

- Utsignal (vill styra) $y(t)$ är tankens vattenhöjd
- Insignal (kan styra) $u(t)$ är spänningen till kranen
- Störsignal (kan inte styra) $v(t)$ är utflödet via pumpen

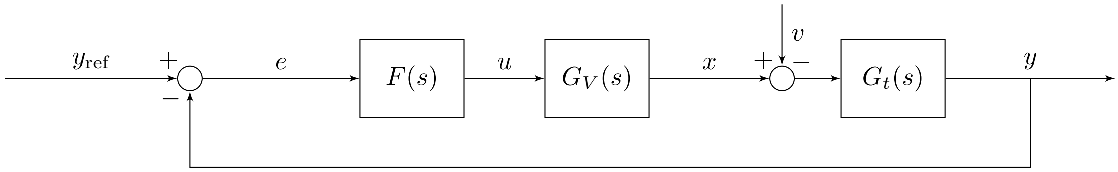

Figure 3: Blockdiagram för hela systemet

Problem 3.2

3.2 a)

$$
\begin{aligned}
u(t) =& K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \\
e(t) =& r(t) - y(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U(s) =& K_P E(s) + K_I \frac{1}{s} E(s) + K_D s E(s) = \Big(K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s \Big) E(s) \\
E(s) =& R(s) - Y(s)
\end{aligned}
$$

$$
F(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s
$$

3.2 b)

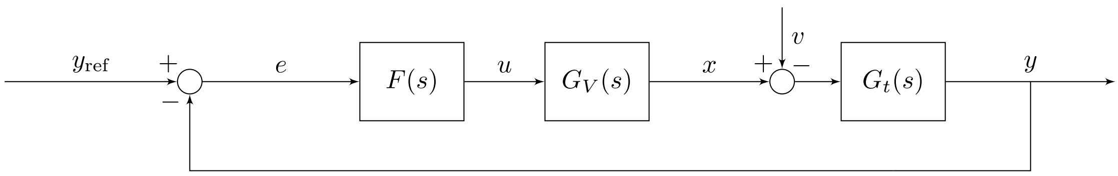

Figure 4: Blockdiagram för hela systemet

3.2 c)

$$Y(s) = G_t(s)\Big(X(s) - V(s)\Big)$$

$$X(s) = G_V(s)F(s)\Big(R(s) - Y(s)\Big)$$

Lös ut $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{G_t(s)G_V(s)F(s)R(s) - G_t(s)V(s)}{1 + G_t(s)G_V(s)F(s)}$$

Med öppna systemets överföringsfunktion $G_O(t) = G_t(s)G_V(s)F(s)$ så kan vi skriva

$$Y(s) = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)}R(s) - \frac{G_t(s)}{1 + G_O(s)}V(s)$$

Problem 3.3

3.3 a)

Proportionell regulator $F(s) = K_P$:

$$Y(s) = \frac{2K_P}{5s^2 + s + 2K_P}R(s) - \frac{1 + 5s}{5s^2 + s + 2K_P}V(s)$$

Polerna ges av nollställenda till nämnaren: $5s^2 + s + 2K_P = 0$. Alltså där

$$s = -0.1 \pm \sqrt{0.01 - 0.4K_P}$$

För $K_P = 0.02$ polerna är -0.055 och -0.145. Realla negativa poler: stabilt, inga oscillationer.

För $K_P = 1$ polerna är $-0.1 \pm i0.624$. Negativ realdel, men stor imaginär del: Stabilt, men stora oscillationer.

3.3 b)

Titta på polerna, systemet är stabilt för $K_P > 0$. Använd slutvärdessatsen

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

$$R(s) = \frac{5}{s}, \quad V(s) = \frac{2}{s}$$

så

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} 5\frac{2K_P}{5s^2 + s + 2K_P} - 2\frac{1 + 5s}{5s^2 + s + 2K_P} = 5 - \frac{1}{K_P}$$

Systemet kommer inte gå till referensvärdet, men närmar sig då K_P blir större. Men som vi såg i uppgift 3.3a) så blir systemet också mer svängigt.

3.3 c)

Med en PI-regulator $F(s) = K_P + K_I \frac{1}{s}$ fås

$$Y(s) = \frac{2(K_P s + K_I)}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} R(s) - \frac{s(1+5s)}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} V(s)$$

Antar att systemet är stabilt för valda K_P, K_I, så vi kan använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} 5\frac{2(K_P s + K_I)}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} - 2\frac{s(1+5s)}{5s^3 + s^2 + 2K_P s + 2K_I} = 5$$

Så vi får inget statiskt fel (om systemet är stabilt).

3.3 d)

Med en PD-regulator $F(s) = K_P K_D s$ fås

$$Y(s) = \frac{2K_P + 2K_D s}{5s^2 + s + 2K_P + 2K_D s} R(s) - \frac{1+5s}{5s^2 + s + 2K_P + 2K_D s} V(s)$$

Polerna ges av nollställena till nämnaren. Med $K_P = 1$ fås karakteristisk ekvation

$$5s^2 + (1 + 2K_D)s + 2 = 0.$$

Dämpningskoefficienten hittar vi i den generella karakteristiska ekvationen

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

vilket ger oss $\zeta = \frac{0.2+0.4K_D}{2\sqrt{0.4}}$. Villkoret $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ innebär att $K_D > 1.74$.

Dvs genom att lägga till en deriverande del kan vi förbättra dämpningen, och därigenom minska överslängen.