Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-01-13, kl. 14.00–19.00.

5B1202/2 Diff och Trans 2 del 2, för F, E, T.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Beräkna Fourierserien (med period 2π) till funktionen

$$f(t) = \left|\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right| + \cos^2 t, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Rita även grafen till Fourierserien på intervallet $[-2\pi, 4\pi]$. (5)

2. Finn en lösning till Dirichlet-problemet $\Delta u = 0$ på skivan

$$D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

med randvärdena

$$u(3\cos\theta, 3\sin\theta) = 5\cos^3\theta, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

(5)

3. Bestäm de konstanter a, b så att integralen

$$\int_0^{+\infty} \left|a + b\,x - \cos x\right|^2 e^{-x}\,dx$$

blir så liten som möjligt, och beräkna detta (minsta) värde. (5)

4. Betrakta integralekvationen

$$\int_{-1}^{1} f(x-y)\,dy = g(x),$$

där x löper över alla reella tal. Här är funktionen g given, och vi letar efter funktionen f. Finns det några naturliga villkor som är nödvändiga på g för att ovanstående skall ha en lösning f som är absolut-integrerbar på hela reella linjen (dvs av klass $L^1(\mathbb{R})$)? Vi utgår ifrån att även g är av klass $L^1(\mathbb{R})$. För att illustrera problemet, studera speciellt följande två fall:

(a) $g(x) = 1$ på intervallet $[-2, 2]$, medan $g(x) = 0$ i övrigt,

(b) $g(x) = 2 - |x|$ på intervallet $[-2, 2]$, medan $g(x) = 0$ i övrigt. (5)

V.g. vänd!

5. Genom att använda metoden med separation av variabler, lös ekvationen

$$u''_{xx} = 4\,u'_t, \qquad 0 < x < \pi,\ \ 0 < t < +\infty,$$

med randvillkoren

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty,$$

voch begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = x(\pi - x), \qquad 0 < x < \pi.$$

(6)

6. Beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$g(t) = \begin{cases} \sin(2t) - \cos(3t),, & -2\pi < t < 2\pi, \\ 0, & |t| > 2\pi. \end{cases}$$

(5)

7. Beräkna integralen

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\,t^2}{(a^2+t^2)^5}\,dt, \qquad a > 0,$$

genom att betrakta Fouriertransformen till funktionen

$$h(t) = t\,e^{-a|t|},$$

och observera därvid att

$$I(a) = \frac{d}{da}\,J(a),$$

där $J(a)$ liksom $I(a)$ är en bestämd integral som beror av a. (5)