Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-01-13, kl. 14.00–19.00.

5B1202/2 Diff och Trans 2 del 2, för F, E, T.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Beräkna Fourierserien (med period 2π) till funktionen

$$f(t) = \left|\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right| + \cos^2 t, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Rita även grafen till Fourierserien på intervallet $[-2\pi, 4\pi]$. (5)

Vi observerar först att

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos(2t)\Big),$$

vilket betyder att vi har Fourierserieutvecklat vänster led (med period 2π). Enligt de trigonometriska additionsformlerna har vi

$$\left|\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin t\right|,$$

och enligt BETA, s. 310 gäller att

$$\left|\sin t\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}\cos(2nt).$$

Lägger vi ihop dessa två utvecklingar erhålls

$$f(t) = \frac{1}{2}\Big(1+\cos(2t)\Big) + \left|\sin t\right| = \left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi}\right)\cos(2t) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt).$$

Detta är alltså Fourierserieutvecklingen. Grafen sammanfaller med grafen till funktionen f, vilken även den har period 2π. Av tekniska skäl avstår vi här från att rita grafen på det indikerade intervallet.

V.g. vänd!

2. Finn en lösning till Dirichlet-problemet $\Delta u = 0$ på skivan

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

med randvärdena

$$u(3\cos\theta, 3\sin\theta) = 5\cos^3\theta, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

(5)

Enligt variabel-separations-metoden kan vi ansätta lösningen till Dirichlets problem på formen

$$u(r,\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \Big[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\Big],$$

där $c_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ är konstanter vi kan anpassa. Här står (r,θ) för en punkt i planet given på polär form. Enligt randdata på cirkeln med radie $r = 3$ har vi således

$$u(3,\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \Big[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\Big] = 5\cos^3\theta. \tag{1}$$

Enligt formeln

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\Big(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\Big)$$

beräknar vi tredjepotensen lätt:

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\Big(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\Big)^3 = \frac{1}{8}\Big(2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)\Big).$$

Höger led i (1) är alltså omskrivet som en ändlig Fourierserie, och vi kan identifiera koefficienter:

$$c_0 = 0, \qquad b_n = 0 \quad \text{för} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

och

$$a_1 = \frac{5}{4}, \qquad a_3 = \frac{5}{108},$$

medan $a_n = 0$ för alla övriga n. Lösningen blir alltså

$$u(r,\theta) = \frac{5}{4}\, r\cos(\theta) + \frac{5}{108}\, r^3 \cos(3\theta),$$

återigen uttryckt i polära koordinater. Skriver vi så om ovanstående i vanliga koordinater (x,y), får vi

$$u(x,y) = \frac{5}{4}\, x + \frac{5}{108}\Big(x^3 - 3xy^2\Big).$$

---

3. Bestäm de konstanter a, b så att integralen

$$\int_0^{+\infty} \Big| a + b\,x - \cos x \Big|^2 e^{-x}\,dx$$

blir så liten som möjligt, och beräkna detta (minsta) värde. (5)

Här behöver vi Laguerre-polynomen [BETA, ss. 263–264],

$$L_0(x) = 1, \qquad L_1(x) = 1 - x,$$

vilka är ortonormerade med avseende på inre produkten

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\,\bar{g}(x)\,e^{-x}\,dx.$$

Projektionen av $f(x) = \cos x$ på det delrum som uppspänns av L_0, L_1 ges av

$$\langle f, L_0 \rangle\, L_0(x) + \langle f, L_1 \rangle\, L_1(x),$$

så vi behöver beräkna ovanstående inre produkter. Detta kommer så att ge värdena på parametrarna a, b; dessutom får vi det sökta minsta värdet som

$$\|f\|^2 - \big|\langle f, L_0 \rangle\big|^2 - \big|\langle f, L_1 \rangle\big|^2.$$

Vi beräknar:

$$\langle f, L_0 \rangle = \int_0^{+\infty} \cos(x)\,e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}$$

enligt en formel för Laplace-transformer i BETA, s. 327, samt

$$\langle f, L_1 \rangle = \int_0^{+\infty} (1 - x)\,\cos(x)\,e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}$$

om vi tittar på ytterligare en sådan formel i BETA, s. 328. Vi får således att

$$a + bx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(1 - x) = 1 - \frac{x}{2},$$

dvs $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$. Vi behöver normen på f:

$$\|f\|^2 = \int_0^{+\infty} \cos^2(x)\,e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \big(1 + \cos(2x)\big)\,e^{-x}\,dx = \frac{3}{5},$$

enligt formel i BETA, s. 327. Minimum blir alltså:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

V.g. vänd!

4. Betrakta integralekvationen

$$\int_{-1}^{1} f(x-y)\,dy = g(x),$$

där x löper över alla reella tal. Här är funktionen g given, och vi letar efter funktionen f. Finns det några naturliga villkor som är nödvändiga på g för att ovanstående skall ha en lösning f som är absolut-integrerbar på hela reella linjen (dvs av klass $L^1(\mathbb{R})$)? Vi utgår ifrån att även g är av klass $L^1(\mathbb{R})$. För att illustrera problemet, studera speciellt följande två fall:

(a) $g(x) = 1$ på intervallet $[-2, 2]$, medan $g(x) = 0$ i övrigt,

(b) $g(x) = 2 - |x|$ på intervallet $[-2, 2]$, medan $g(x) = 0$ i övrigt. (5)

Låt $1_{[-1,1]}$ beteckna funktionen som antar värdet 1 på intervallet $[-1, 1]$, medan värdet är 0 i övrigt. Ovanstående ekvation kan vi nu skriva som en faltningsekvation:

$$f * 1_{[-1,1]} = g.$$

Denna Fouriertransformerar vi, och får

$$\widehat{f}(\omega)\,\widehat{1}_{[-1,1]}(\omega) = \widehat{g}(\omega),$$

för alla reella ω. En kalkyl ger vid handen att

$$\widehat{1}_{[-1,1]}(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-it\omega}\,dt = 2\int_{0}^{1} \cos(t\omega)\,dt = 2\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right]_{t=0}^{1} = 2\,\frac{\sin(\omega)}{\omega},$$

för $\omega \neq 0$, medan

$$\widehat{1}_{[-1,1]}(0) = 2.$$

Vi noterar att $\widehat{1}_{[-1,1]}(\omega)$ har nollställen i alla punkter $\omega = n\pi$, för $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Detta innebär att för att kunna lösa ovanstående ekvation måste även $\widehat{g}(\omega)$ ha nollställen i dessa punkter.

Vi betraktar först funktionen g i (a). Då blir

$$\widehat{g}(\omega) = \widehat{1}_{[-2,2]}(\omega) = 2\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega},$$

vilket ger att

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega)} = 2\cos(\omega).$$

Funktionen $2\cos(\omega)$ går ej mot 0 då $|\omega| \to +\infty$, vilket enligt Riemann-Lebesgues lemma innebär att f ej kan ligga i klassen $L^1(\mathbb{R})$.

Vi betraktar sedan funktionen g i fall (b). Då blir

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-2}^{2} (2 - |t|)\, e^{-it\omega} dt = 2 \int_{0}^{2} (2 - t)\, \cos(t\omega)\, dt = 4 \left(\frac{\sin(\omega)}{\omega} \right)^2,$$

och lösningen f blir given av

$$\widehat{f}(\omega) = 2\, \frac{\sin(\omega)}{\omega},$$

dvs $f = 1_{[-1,1]}$. Detta problem är alltså lösbart.

---

5. Genom att använda metoden med separation av variabler, lös ekvationen

$$u''_{xx} = 4\, u'_t, \qquad 0 < x < \pi, \;\; 0 < t < +\infty,$$

med randvillkoren

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = x(\pi - x), \qquad 0 < x < \pi.$$

(6)

Värmeledningsproblemet $u''_{xx} = 4\, u'_t$ längs med $0 < x < \pi$, $0 < t < +\infty$, med perioden

2π i x-led har lösningen

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t/4}\Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big).$$

Vi stoppar in en del av randvillkoren, nämligen

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

vilket ger att

$$c_0 = 0, \qquad a_n = 0 \quad \text{för} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

så att

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \, e^{-n^2 t/4} \, \sin(nx).$$

Det återstående randvillkoret get

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \, \sin(nx) = x(\pi - x) \quad \text{för} \quad 0 < x < \pi.$$

Detta löser vi med hjälp av BETA, s. 309:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \, \sin(nx) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \, \sin\Big((2k-1)x\Big),$$

vilket låter oss dra slutsatsen att $b_n = 0$ för jämna n, medan för udda n gäller att

$$b_n = \frac{8}{\pi} \frac{1}{(2k-1)^3} \quad \text{för} \quad n = 2k-1.$$

Vi finner att

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \, e^{-(2k-1)^2 t/4} \, \sin\Big((2k-1)x\Big),$$

vilket alltså är den sökta lösningen.

---

6. Beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$g(t) = \begin{cases} \sin(2t) - \cos(3t), & -2\pi < t < 2\pi, \\ 0, & |t| > 2\pi. \end{cases}$$

(5)

Vi finner att

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-it\omega} dt = \int_{-2\pi}^{2\pi} \Big(\sin(2t) - \cos(3t) \Big)\, e^{-it\omega} dt$$

$$= -2i \int_{0}^{2\pi} \sin(2t)\sin(\omega t)\, dt - 2\int_{0}^{2\pi} \cos(2t)\cos(\omega t)\, dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} \Big(\cos\big((2+\omega)t\big) - \cos\big((2-\omega)t\big) \Big)\, dt - \int_0^{2\pi} \Big(\cos\big((3+\omega)t\big) + \cos\big((3-\omega)t\big) \Big)\, dt$$

$$= \left(\frac{4i}{4-\omega^2} + \frac{2\omega}{9-\omega^2} \right) \sin(2\pi\omega).$$

Denna formel gäller bara för $\omega \neq \pm 2, \pm 3$, och värdet i dessa återstående punkter fås som gränsvärdet av ovanstående. Man får då

$$\widehat{f}(2) = -2\pi i, \qquad \widehat{f}(-2) = 2\pi i, \qquad \widehat{f}(3) = \widehat{f}(-3) = -2\pi.$$

---

7. Beräkna integralen

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\, t^2}{(a^2+t^2)^5}\, dt, \qquad a > 0,$$

genom att betrakta Fouriertransformen till funktionen

$$h(t) = t\, e^{-a|t|},$$

och observera därvid att

$$I(a) = \frac{d}{da} J(a),$$

där $J(a)$ liksom $I(a)$ är en bestämd integral som beror av a. (5)

Vi finner, enligt BETA, s. 314, att

$$\widehat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-a|t|}\, e^{-it\omega}\, dt = -\frac{4ia\omega}{(a^2+\omega^2)^2},$$

så att enligt Parsevals formel [BETA, s. 312] har vi

$$\frac{1}{2a^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, e^{-2a|t|} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16\, a^2\omega^2}{(a^2+\omega^2)^4}\, d\omega.$$

Vi delar med $16\, a^2$ på båda sidor, och erhåller

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^4}\, d\omega = \frac{\pi}{16\, a^5}.$$

Denna ekvation gäller för alla a, och således kan vi derivera med avseende på a och behålla likhet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-4\,a\,\omega^2}{(a^2+\omega^2)^5}\,d\omega = -\frac{5\pi}{16\,a^6}.$$

Vi delar med $-1/4$ på bägge sidor, och får

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\,\omega^2}{(a^2+\omega^2)^5}\,d\omega = \frac{5\pi}{64\,a^6}.$$

Detta är alltså värdet på den sökta integralen.