Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2003-08-25, kl. 14.00–19.00.

5B1202/2 Diff och Trans 2 del 2, för F, E, T.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Beräkna Fourierserien med period 2π av funktionen

$$f(t) = t\,e^t, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Rita även upp grafen till Fourierseriens summa på intervallet $[-2\pi, 3\pi]$, samt ange summans värde i punkterna $-\pi$, 0, π, 2π. (5)

2. Finn en lösning till Dirichlet-problemet $\Delta u = 0$ på enhetsskivan

$$D = \big\{(x,y) : \, x^2 + y^2 \le 1\big\}$$

med randvärdena

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = \sin^3\theta + \cos^3\theta, \qquad 0 \le \theta < 2\pi.$$

(5)

3. Bestäm de konstanter a, b som minimerar integralen

$$\int_{-1}^{1} \Big| a + b\,x^2 - \cos x \Big|^2 \, dx.$$

(5)

4. Låt a, b vara positiva reella tal, och betrakta integralekvationen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, e^{-a\,y^2}\, dy = e^{-b\,x^2}$$

där x löper över alla reella tal. Problemet består i att finna en lösning f som ligger i $L^1(\mathbb{R})$, dvs som är absolut-integrabel på reella linjen. Avgör för vilka a, b denna ekvation är lösbar, samt om lösningen därvid är entydig. I de fall ekvationen är lösbar, bestäm även lösningen (eller lösningarna). (5)

V.g. vänd!

5. Genom att använda metoden med separation av variabler, lös ekvationen

$$u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < \pi, \;\; 0 < t < +\infty,$$

med randvillkoren

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = \cos x, \qquad 0 < x < \pi.$$

(6)

6. Finn ut om det finns en lösning f till differentialekvationen

$$f''(x) - f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

som är begränsad på hela reella linjen. Bestäm i så fall Fouriertransformen till denna, dvs $\widehat{f}(\omega)$. Vi tänker oss härvid att funktionen $(\sin x)/x$ definieras vara $= 1$ då $x = 0$. (5)

7. Betrakta problemet

$$u''(x) + \lambda\, u(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi,$$

med randvillkor

$$u(0) = 0, \qquad u(\pi) + u'(\pi) = 0.$$

Finn ett fullständigt ortogonalt system av lösningar till detta problem i rummet $L^2([0,\pi])$, med avseende på standard-inre produkten i detta rum. (5)