Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2003-08-25, kl. 14.00–19.00.

5B1202/2 Diff och Trans 2 del 2, för F och T.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Beräkna Fourierserien med period 2π av funktionen

$$f(t) = t\,e^t, \qquad -\pi < t < \pi.$$

Rita även upp grafen till Fourierseriens summa på intervallet $[-2\pi, 3\pi]$, samt ange summans värde i punkterna $-\pi$, 0, π, 2π. (5)

Fourierserien ges av formeln

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{int},$$

där koefficienterna ges av formeln

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} e^t\, t\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(-in+1)t}\, t\,dt.$$

Enligt partiell integrations-formeln gäller att

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(-in+1)t}\, t\,dt = \left[t\,\frac{e^{(1-in)t}}{1-in}\right]_{t=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{(1-in)t}}{1-in}\,dt,$$

vilket ger till resultat att

$$c_n = (-1)^n \left\{ \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}\,\frac{1}{1-in} - \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\,\frac{1}{(1-in)^2} \right\}.$$

Fourierserien ges alltså av uttrycket

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left\{ \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}\,\frac{1}{1-in} - \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\,\frac{1}{(1-in)^2} \right\} e^{int}.$$

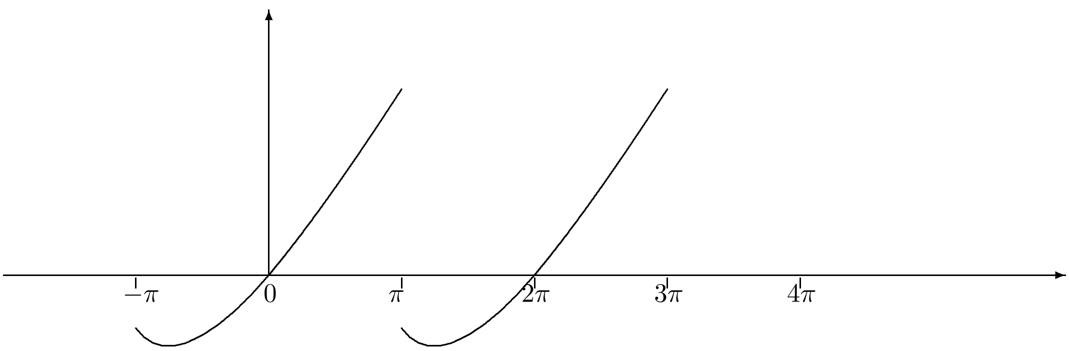
Ett av huvudresultaten i Fourier-teorin säger att Fourierserien konvergerar mot funktionen, utom i diskontinuitetspunkter, förutsatt att funktionen uppfyller vissa regularitetsvillkor. Vi får således att $S(t) = f(t)$ på intervallet $-\pi < t < \pi$, och motsvarande

V.g. vänd!

på intervallen $-3\pi < t < -\pi$ och $\pi < t < 3\pi$, eftersom $S(t)$ har perioden 2π. I diskontinuitespunkter konvergerar Fourierserien mot medelvärdet av vänster- och högergränsvärdena för funktionen. Summans värde i de angivna punkterna blir således:

$$S(0) = S(2\pi) = 0, \quad S(\pi) = S(-\pi) = \frac{\pi}{2}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right).$$

Grafen för Fourierserien ritas nedan (fast på det lite mindre intervallet $[-\pi, 3\pi]$).



---

2. Finn en lösning till Dirichlet-problemet $\Delta u = 0$ på enhetsskivan

$$D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

med randvärdena

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = \sin^3\theta + \cos^3\theta, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

(5)

Laplace' ekvation Δu skrivs i polära koordinater

$$r\partial_r\big(r\partial_r u\big) + \partial_\theta^2 u = 0.$$

Denna får med variabelseparations-metoden lösningen (i polära koordinater)

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n\Big(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\Big).$$

Vi har givet att för $r=1$,

$$u(1,\theta) = \sin^3\theta + \cos^3\theta.$$

Med hjälp av de Moivres formel finner vi att

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3\,e^{i\theta} + 3\,e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = -\frac{1}{4}\,\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\,\sin\theta,$$

samt att

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta} + 3\,e^{i\theta} + 3\,e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{1}{4}\,\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\,\cos\theta.$$

Detta ger lösningen u på formen

$$u(r,\theta) = \frac{1}{4}\Big(3r\cos\theta + 3r\sin\theta + r^3\cos(3\theta) - r^3\sin(3\theta)\Big),$$

vilket skrivs om som

$$u(x,y) = \frac{1}{4}\Big(3x + 3y + x^3 - 3xy^2 + y^3 - 3x^2y\Big),$$

uttryckt i de vanliga x,y-koordinaterna.

---

3. Bestäm de konstanter a,b som minimerar integralen

$$\int_{-1}^{1}\Big|a + b\,x^2 - \cos x\Big|^2 dx.$$

(5)

V.g. vänd!

Polynomen

$$P_0(x) = 1, \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}\big(3x^2 - 1\big)$$

är ortogonala i $L^2([-1,1])$. Deras normer (i kvadrat) är

$$\|P_0\|^2 = 2, \qquad \|P_2\|^2 = \frac{2}{5}.$$

Låt g beteckna funktionen $g(x) = \cos x$. Vi har då att

$$\langle P_0, g\rangle = \int_{-1}^{1} \cos x\, P_0(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \cos x\, dx = 2\sin 1,$$

och vidare

$$\langle P_2, g\rangle = \int_{-1}^{1} \cos x\, P_2(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos x\,\big(3x^2 - 1\big)\, dx,$$

varpå vi nyttjar [BETA, s. 164] för att erhålla

$$\int_{-1}^{1} x^2 \cos x\, dx = \Big[-2\sin x + 2x\cos x + x^2 \sin x\Big]_{-1}^{1} = 4\cos 1 - 2\sin 1,$$

och får således

$$\langle P_2, g\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos x\,\big(3x^2 - 1\big)\, dx = 6\cos 1 - 4\sin 1.$$

Den vektor i delrummet som uppspänns av P_0, P_2 vilken ligger närmast g är projektionen av g på delrummet, som kan skrivas

$$\frac{\langle P_0, g\rangle}{\|P_0\|^2}\, P_0(x) + \frac{\langle P_2, g\rangle}{\|P_2\|^2}\, P_2(x) = \sin 1 + \frac{5}{2}\,\big(3\cos 1 - 2\sin 1\big)\big(3x^2 - 1\big).$$

Detta ger värdena på a, b vid minimum:

$$a = 6\sin 1 - \frac{15}{2}\cos 1, \qquad b = \frac{15}{2}\big(3\cos 1 - 2\sin 1\big).$$

---

4. Låt a, b vara positiva reella tal, och betrakta integralekvationen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, e^{-a\,y^2}\, dy = e^{-b\,x^2}$$

där x löper över alla reella tal. Problemet består i att finna en lösning f som ligger i $L^1(\mathbb{R})$, dvs som är absolut-integrabel på reella linjen. Avgör för vilka a, b denna ekvation är lösbar, samt om lösningen därvid är entydig. I de fall ekvationen är lösbar, bestäm även lösningen (eller lösningarna). (5)

Vi ser att ekvationen är av faltningstyp, längs med hela reella linjen. Vi skriver, för positiva värden på a,

$$\varphi_a(x) = e^{-ax^2},$$

och inser att vår ekvation kan skrivas

$$\varphi_a * f = \varphi_b.$$

Det är naturligt att behandla denna ekvation med Fourier-transformering, eftersom de ingående funktionerna alla är absolut-integrabla på reella linjen. Därvid erhålls ekvationen

$$\widehat{\varphi}_a(\omega)\,\widehat{f}(\omega) = \widehat{\varphi}_b(\omega),$$

för godtyckligt reellt ω. Enligt [BETA, s. 314] har vi

$$\widehat{\varphi}_a(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\omega^2/(4a)},$$

och vi finner att

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\widehat{\varphi}_b(\omega)}{\widehat{\varphi}_a(\omega)} = \sqrt{\frac{a}{b}}\,e^{-\xi\omega^2},$$

där

$$\xi = \frac{1}{4b} - \frac{1}{4a}.$$

Om f skall ligga i klassen $L^1(\mathbb{R})$, måste $\widehat{f}(\omega)$ vara en kontinuerlig funktion som går mot noll då $|\omega| \to +\infty$. Detta är möjligt endast då ξ är positivt, dvs om

$$b < a.$$

Å andra sidan, om detta villkor är uppfyllt, så måste f vara entydigt bestämt [entydighetssatsen för Fourier-transformen], och dessutom av samma typ som φ_a, mer precist uttryckt,

$$f(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi(a-b)}}\,e^{-ab\,x^2/(a-b)}.$$

---

5. Genom att använda metoden med separation av variabler, lös ekvationen

$$u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < \pi,\ \ 0 < t < +\infty,$$

med randvillkoren

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = \cos x, \qquad 0 < x < \pi.$$

(6)

V.g. vänd!

Vi letar först efter variabelseparerade lösningar, dvs vi sätter

$$u(x,t) = X(x)\,T(t),$$

och kräver därvid att

$$X(0) = X(\pi) = 0,$$

förutom att

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T},$$

vilket följer ur värmeledningsekvationen. Eftersom vänster sida ovan bara beror av x, medan höger sida bara beror av t, följer att båda måste vara konstanta. Vi skriver således

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda,$$

och får ekvationerna

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad T' + \lambda T = 0.$$

Vi delar nu upp i tre olika fall.

Fall 1. $\lambda > 0$, och vi skriver $\lambda = \omega^2$, med $\omega > 0$. Funktionen X är då på formen

$$X = A\,\cos(\omega x) + B\,\sin(\omega x),$$

vilket leder till

$$X' = -A\,\omega\,\sin(\omega x) + B\,\omega\,\cos(\omega x).$$

Vi finner ur $X(0) = X(\pi) = 0$ att

$$A = 0, \qquad \omega = n,$$

där n är ett positivt heltal. Motsvarande funktion T blir

$$T(t) = C\,e^{-n^2 t},$$

så genom att välja $C = 0$ får vi den kombinerade lsningen

$$u_n(x,t) = T(t)\,X(x) = B_n\,e^{-n^2 t}\,\sin(nx).$$

Fall 2. $\lambda = 0$, och vi får att

$$X = Ax + B,$$

vilket tillsammans med $X(0) = X(\pi) = 0$ ger att $A = B = 0$ och att X är konstant lika med noll. Vi får ingen icke-trivial lösning.

Fall 3. $\lambda < 0$, och vi sätter $\lambda = -\omega^2$ med $\omega > 0$. Här blir lösningen

$$X = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t},$$

så att

$$X' = A\omega\,e^{\omega t} - B\omega\,e^{-\omega t}.$$

Det följer nu ur $X(0) = X(\pi) = 0$ att $A = B = 0$, så i detta fall erhåller vi enbart triviala lösningar.

Vi får enligt superpositionsprincipen den allmänna lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Vi identifierar nu begynnelsedata:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, \sin(nx) = \cos x, \qquad 0 < x < \pi.$$

Enligt BETA, s. 309, har vi sinusserie-utveckligen

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin\big(2nx\big), \qquad 0 < x < \pi.$$

Det följer alltså att vår sökta lösning är

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \, e^{-4n^2 t} \sin\big(2nx\big).$$

---

6. Finn ut om det finns en lösning f till differentialekvationen

$$f''(x) - f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

som är begränsad på hela reella linjen. Bestäm i så fall Fouriertransformen till denna, dvs $\widehat{f}(\omega)$. Vi tänker oss härvid att funktionen $(\sin x)/x$ definieras vara $= 1$ då $x = 0$. (5)

Om det finns en lösning f är denna nödvändigtvis kontinuerlig längs hela linjen. Villkoret att f skall vara begränsad innebär således att vi kan tänka på funktionen som en tempererad distribution, och använda Fourier-transformen precis som vanligt. Vi finner, i enlighet med [BETA, s. 313, 315], att

$$(i\omega)^2 \widehat{f}(\omega) - \widehat{f}(\omega) = \pi \, 1_{[-1,1]}(\omega),$$

där $1_{[-1,1]}$ står för funktionen som är 1 på intervallet $[-1,1]$, och lika med 0 utanför detta. Vi löser denna ekvation:

$$\widehat{f}(\omega) = -\frac{\pi}{1+\omega^2} \, 1_{[-1,1]}(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{1+\omega^2}, & -1 \le \omega \le 1, \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases}$$

Detta är den sökta Fourier-transformen. Vi ser, eftersom $\widehat{f}$ är absolut-integrabel längs hela reella linjen, att f själv måste vara kontinuerlig och ha gränsvärde 0 i oändligheten, och då speciellt vara en begränsad funktion. Denna slutsats kan dras p g a Riemann-Lebesgues lemma, emedan inversa Fourier-transformen i allt väsentligt är samma som Fourier-transformen själv (skillnaden är en spegling i origo och en konstant faktor).

V.g. vänd!

7. Betrakta problemet
$$u''(x) + \lambda\, u(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi,$$
med randvillkor
$$u(0) = 0, \qquad u(\pi) + u'(\pi) = 0.$$
Finn ett fullständigt ortogonalt system av lösningar till detta problem i rummet $L^2([0, \pi])$, med avseende på standard-inre produkten i detta rum. (5)

Om $\lambda > 0$, skriver vi $\lambda = \omega^2$, där $\omega > 0$, och löser ekvationen $u'' + \lambda u = 0$:
$$u = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$
Detta leder till att
$$u' = -A\omega\sin(\omega x) + B\cos(\omega x),$$
så att när vi stoppar in randdata $u(0) = u(\pi) + u'(\pi) = 0$, så finner vi att $A = 0$ och att (om $B \neq 0$ antas) ω skall lösa ekvationen
$$\sin(\omega\pi) + \omega\cos(\omega\pi) = 0,$$
dvs
$$\tan(\omega\pi) = -\omega.$$
Geometriskt finner vi alltså dessa lösningar som skärningspunkterna mellan tangensfunktionens graf och en rät linje.

För $\lambda \leq 0$ finner vi inga lösningar som är kompatibla med randdata $u(0) = u'(\pi) = 0$.

Detta betyder att en bas av egenvektorer ges av
$$u_n(x) = \sin(\omega_n x),$$
där ω_n, för $n = 1, 2, 3, \ldots$, genomlöper de ovannämnda positiva lösningarna till ekvationen $\tan(\pi\omega_n) = -\omega_n$.

Dessa bildar den sökta basen. Den är ortogonal och fullständig enligt teorin för Sturm-Liouville-problem.