Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2003-05-26, kl. 14.00–19.00.

5B1202/2 Diff och Trans 2 del 2, för F och T.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs 18 poäng, medan för betyg 4 krävs 25 poäng, och för betyg 5 32 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) - \sin(3t), & -\pi < t < \pi, \\ 0 & |t| \geq \pi. \end{cases}$$

(5)

Fouriertransformen ges av formeln

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-it\omega} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(2t) - \sin(3t)\big)\, e^{-it\omega} dt.$$

Eftersom cosinus-funktionen är en jämn, får vi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t)\, e^{-it\omega} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t)\, \big(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\big)\, dt = 2\int_{0}^{\pi} \cos(2t)\, \cos(\omega t)\, dt.$$

Enligt trigonometriska formler är

$$2\, \cos(2t)\, \cos(\omega t) = \cos\big[(\omega - 2)t\big] + \cos\big[(\omega + 2)t\big],$$

så att om $\omega \neq \pm 2$,

$$2\int_{0}^{\pi} \cos(2t)\, \cos(\omega t)\, dt = \frac{1}{\omega - 2}\, \sin\big[(\omega - 2)\pi\big] + \frac{1}{\omega + 2}\, \sin\big[(\omega + 2)\pi\big] = \frac{2\omega}{\omega^2 - 4}\, \sin(\omega\pi).$$

Eftersom sinus-funktionen är udda, få vi likaså

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3t)\, e^{-it\omega} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3t)\, \big(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\big)\, dt = -2i\int_{0}^{\pi} \sin(3t)\, \sin(\omega t)\, dt.$$

Enligt trigonometriska formler är

$$2\, \sin(3t)\, \sin(\omega t) = -\cos\big[(\omega + 3)t\big] + \cos\big[(\omega - 3)t\big],$$

så att om $\omega \neq \pm 3$,

$$2i\int_{0}^{\pi} \sin(3t)\, \sin(\omega t)\, dt = \frac{i}{\omega + 3}\, \sin\big[(\omega + 3)\pi\big] - \frac{i}{\omega - 3}\, \sin\big[(\omega - 3)\pi\big] = \frac{6i}{\omega^2 - 9}\, \sin(\omega\pi).$$

Svaret blir således

$$\widehat{f}(\omega) = \left(\frac{2\omega}{\omega^2 - 4} - \frac{6i}{\omega^2 - 9}\right) \sin(\omega\pi),$$

för $\omega \neq \pm 2, \pm 3$. Funktionen $\widehat{f}(\omega)$ är kontinuerlig längs med hela reella axeln, p g a att

V.g. vänd!

f har begränsat stöd. I punkterna $\pm 2, \pm 3$ erhålls alltså värdena som gränsvärden av funktionen i närliggande punkter.

---

2. Finn en lösning till Dirichlet-problemet $\Delta u = 0$ på enhetsskivan

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

med randvärdena

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

(5)

Laplace' ekvation Δu skriv i polära koordinater

$$r\partial_r\big(r\partial_r u\big) + \partial_\theta^2 u = 0.$$

Denna få med variabelseparations-metoden lösningen (i polära koordinater)

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n\Big(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\Big).$$

Vi har givet att för $r = 1$,

$$u(1, \theta) = \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\theta) + \sin(2\theta)\big).$$

Detta ger lösningen u på formen

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}\big(1 - r^2\cos(2\theta) + r^2\sin(2\theta)\big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\big(y^2 - x^2\big) + xy,$$

uttryckt i de vanliga x, y-koordinaterna.

---

3. Bestäm de konstanter a, b som minimerar integralen

$$\int_{-1}^{1}\Big|a + b\,x - e^{-x}\Big|^2 dx.$$

(5)

Polynomen

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x$$

är ortogonala i $L^2([-1,1])$. Deras normer (i kvadrat) är

$$\|P_0\|^2 = 2, \qquad \|P_1\|^2 = \frac{2}{3}.$$

Låt g beteckna funktionen $g(x) = e^{-x}$. Vi har då att

$$\langle P_0, g\rangle = \int_{-1}^{1} e^{-x} P_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx = e - e^{-1},$$

och vidare

$$\langle P_1, g\rangle = \int_{-1}^{1} e^{-x} P_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,e^{-x}\,dx = -2\,e^{-1}.$$

Den vektor i delrummet som uppspänns av P_0, P_1 vilken ligger närmast g är projektionen av g på delrummet, som kan skrivas

$$\frac{\langle P_0, g\rangle}{\|P_0\|^2} P_0(x) + \frac{\langle P_1, g\rangle}{\|P_1\|^2} P_1(x) = \frac{e - e^{-1}}{2} - 3\,e^{-1}\,x.$$

Detta ger värdena på a, b vid minimum:

$$a = \frac{e - e^{-1}}{2}, \qquad b = -3\,e^{-1}.$$

---

4. Bestäm Fourierserien av funktionen

$$g(t) = |\sin t| + \sin^2 t, \qquad -\pi < t < \pi.$$

(5)

Vi vet att

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2t)\big).$$

Vi observerar att g är en jämn funktion, så bara cosinus-termer kommer att förekomma. Enligt BETA, s. 310 har vi

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\,\cos(2nt).$$

Lägger vi ihop dessa blir resultatet

$$g(t) = |\sin t| + \sin^2 t = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3\pi}\right)\cos(2t) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\,\cos(2nt).$$

---

5. Genom att använda metoden med separation av variabler, lös ekvationen

$$u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < \pi, \;\; 0 < t < +\infty,$$

med randvillkoren

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = \pi - x, \qquad 0 < x < \pi.$$

(6)

Vi letar först efter variabelseparerade lösningar, dvs vi sätter

$$u(x,t) = X(x)\,T(t),$$

och kräver därvid att

$$X'(0) = X'(\pi) = 0,$$

förutom att

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T},$$

vilket följer ur värmeledningsekvationen. Eftersom vänster sida ovan bara beror av x, medan höger sida bara beror av t, följer att båda måste vara konstanta. Vi skriver således

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda,$$

och får ekvationerna

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad T' + \lambda T = 0.$$

Vi delar nu upp i tre olika fall.

Fall 1. $\lambda > 0$, och vi skriver $\lambda = \omega^2$, med $\omega > 0$. Funktionen X är då på formen

$$X = A\,\cos(\omega x) + B\,\sin(\omega x),$$

vilket leder till

$$X' = -A\,\omega\,\sin(\omega x) + B\,\omega\,\cos(\omega x).$$

Vi finner ur $X'(0) = X'(\pi) = 0$ att

$$B = 0, \qquad \omega = n,$$

där n är ett positivt heltal. Motsvarande funktion T blir

$$T(t) = C\,e^{-n^2 t},$$

så genom att välja $C = 0$ får vi den kombinerade lsningen

$$u_n(x,t) = T(t)\,X(x) = A_n\,e^{-n^2 t}\,\cos(nx).$$

Fall 2. $\lambda = 0$, och vi får att

$$X = Ax + B,$$

vilket tillsammans med $X'(0) = X'(\pi) = 0$ ger att $A = 0$ och att X är konstant. Motsvarande T är likaså konstant, och den kombinerade lšningen blir

$$u_0(x,t) = B.$$

Fall 3. $\lambda < 0$, och vi sätter $\lambda = -\omega^2$ med $\omega > 0$. Här blir lösningen

$$X = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t},$$

så att

$$X' = A\omega\,e^{\omega t} - B\omega\,e^{-\omega t}.$$

Det följer nu ur $X'(0) = X'(\pi) = 0$ att $A = B = 0$, så i detta fall erhåller vi enbart triviala lösningar.

Vi får enligt superpositionsprincipen den allmänna lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,e^{-n^2 t}\cos(nx).$$

Vi identifierar nu begynnelsedata:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\cos(nx) = \pi - x, \qquad 0 < x < \pi.$$

Enligt BETA, s. 309, har vi cosinusserie-utveckligen

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos\big((2n-1)x\big), \qquad 0 < x < \pi.$$

Det följer alltså att vår sökta lösning är

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-(2n-1)^2 t}}{(2n-1)^2}\cos\big((2n-1)x\big).$$

---

6. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$$

genom att betrakta Fouriertransformen till funktionen

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t < +\infty, \\ -e^{t}, & -\infty < t < 0. \end{cases}$$

(5)

V.g. vänd!

En direkt kalkyl ger vid handen att

$$\widehat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-it\omega}\, dt = -\frac{2i\omega}{1+\omega^2}.$$

Enligt Plancherels formel har vi den generella identiteten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{h}(\omega)\right|^2 d\omega.$$

I detta fall leder den till att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\, d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2\, dt = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Detta betyder att det sökta värdet på integralen är $\pi/2$.

---

7. Betrakta problemet

$$u''(x) + \lambda\, u(x) = 0, \qquad 0 < x < \pi,$$

med randvillkor

$$u(0) = 0, \qquad u'(\pi) = 0.$$

Finn ett fullständigt ortogonalt system av lösningar till detta problem i rummet $L^2([0,\pi])$, med avseende på standard-inre produkten i detta rum. (5)

Om $\lambda > 0$, skriver vi $\lambda = \omega^2$, där $\omega > 0$, och löser ekvationen $u'' + \lambda u = 0$:

$$u = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

Detta leder till att

$$u' = -A\omega \sin(\omega x) + B\cos(\omega x),$$

så att när vi stoppar in randdata $u(0) = u'(\pi) = 0$, så finner vi att $A = 0$ och att $\omega = n + \frac{1}{2}$, där $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. För $\lambda \le 0$ finner vi inga lösningar som är kompatibla med randdata $u(0) = u'(\pi) = 0$. Detta betyder att en bas av egenvektorer ges av

$$u_n(x) = \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right], \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Dessa bildar den sökta basen. Den är ortogonal och fullständig enligt teorin för Sturm-Liouville-problem.