Institutionen för matematik
KTH
Håkan Hedenmalm

Lösningsförslag: Tentamen i Komplex analys, SF1691 (SF1628), den 4 juni 2019.

Skrivtid 14.00-19.00. Inga hälpmedel är tillåtna utöver skrivdon och suddgummi. Skriv tydliga lösningar med utörliga motiveringar.

För del **A** gäller följande. Uppgifterna poängsätts med maximalt 5 poäng per uppgift. 14 poäng ger betyg E. 13 poäng ger betyg Fx, med rätt till komplettering.

Bonuspoäng tillgodoräknas enligt beskrivning på kurssidan.

Avseende del **B** gäller följande. Först måste man vara godkänd på del **A** med betyg D, antingen via kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter eller alternativt med komplettering med poäng erhållna på del A enligt ovan.

Betygsättningen görs sedan enligt beskrivning på kurssidan.

Lycka till!

Del A.

1. Finn alla komplexa tal z sådana att $\sin z = 100$.

Vi skriver $w = e^{iz}$, så att $\sin z = \frac{1}{2i}(w - w^{-1})$, och ekvationen blir $w - w^{-1} = 200i$, dvs $w^2 - 200iw - 1 = 0$, med lösning $w = i(100 \pm \sqrt{9999})$. Vi logaritmerar och får $iz = \ln(100 \pm \sqrt{9999}) + \pi i(\frac{1}{2} + 2n)$, dvs $z = -i\ln(100 \pm \sqrt{9999}) + \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, där n är ett heltal.

---

2. Låt funktionen u vara på formen

$$u(z) = u(x, y) = e^{ay}(\sin 2x + \cos 2x),$$

där a är en reell konstant. Antag att u är harmonisk. Vad måste då a vara? Bestäm för detta värde på a ett harmoniskt konjugat till u.

Vi applicerar Laplacianen på u:

$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\big(e^{ay}(\sin 2x + \cos 2x)\big) = (a^2 - 4)(\sin 2x + \cos 2x),$$

så för att få 0 behöver vi att $a = \pm 2$. Om $a = 2$ är $u = \operatorname{Re}\left[(1+i)e^{-2iz}\right]$ och att därför blir ett harmoniskt konjugat $v = \operatorname{Im}\left[(1+i)e^{-2iz}\right] = e^{2y}(-\sin 2x + \cos 2x)$. Om $a = -2$ istället blir $u = \operatorname{Re}\left[(1-i)e^{2iz}\right]$ och att därför blir ett harmoniskt konjugat $v = \operatorname{Im}\left[(1-i)e^{2iz}\right] = e^{-2y}(\sin 2x - \cos 2x)$.

---

3. Funktionen

$$f(z) = \frac{z^3 + z^2 - z + 1}{1 + z^2}$$

kan utvecklas i Laurentserie omkring punkten $z = i$. Det finns två möjliga konvergensområden för sådana Laurentserier. Ange dessa områden samt beräkna de två serierna.

Funktionen har poler i $z^2 = -1$, dvs $z = \pm i$. Utgående från i är avståndet till den andra polen 2, och vi får konvergensområdena $0 < |z-i| < 2$ och $|z-i| > 2$. Vi går nu över till att räkna ut Laurentserierna ifråga. Observera att polynomdivision ger att

$$\frac{z^3 + z^2 - z + 1}{1 + z^2} = z + 1 - \frac{2z}{1 + z^2}.$$

Vi skriver $z = i + \zeta$, så att

$$\begin{aligned} f(z) = f(i+\zeta) &= 1 + i + \zeta - \frac{2(i+\zeta)}{1 + (i+\zeta)^2} = 1 + i + \zeta - \frac{2(i+\zeta)}{2i\zeta + \zeta^2} \\ &= 1 + i + \zeta - \zeta^{-1} - \frac{1}{2i + \zeta} = 1 + i + \zeta - \zeta^{-1} + \frac{i/2}{1 - \frac{i\zeta}{2}}. \end{aligned}$$

För $0 < |z - i| < 2$ blir

$$\begin{aligned} f(z) = f(i+\zeta) &= 1 + i + \zeta - \zeta^{-1} + \frac{i/2}{1 - \frac{i\zeta}{2}} \\ &= 1 + i + \zeta - \zeta^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} \zeta^n \\ &= -(z-i)^{-1} + 1 + (z-i) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} (z-i)^n \end{aligned}$$

den sökta Laurentserien. Analogt blir Laurentserien för $|z - i| > 2$

$$f(z) = z + 1 - (z-i)^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (2i)^n (z-i)^{-n-1}.$$

---

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 6x + 12} dx$$

med hjälp av residukalkyl. Tips: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Vi betraktar funktionen

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 6z + 12}$$

och gör en sluten kontur i övre halvplanet och gå i gräns. Den angivna integralen motsvarar realdelen av motsvarande komplexa integral. Ekvationen $z^2 - 6z + 12 = 0$ har rötterna $z = 3 \pm \sqrt{9-12} = 3 \pm i\sqrt{3}$. En rot ligger i övre halvplanet, $3 + i\sqrt{3}$.

Vi beräknar residun i $3 + i\sqrt{3}$ till $-\frac{i\,e^{-\sqrt{3}+3i}}{2\sqrt{3}}$, så integralen av f längs reella axeln blir

$$-2\pi i \frac{i\,e^{-\sqrt{3}+3i}}{12\sqrt{3}} = 2\pi \frac{e^{-\sqrt{3}+3i}}{2\sqrt{3}}.$$

Den sökta integralen utgör realdelen, vilket blir lika med

$$\pi \frac{e^{-\sqrt{3}} \cos 3}{\sqrt{3}}.$$

---

5. Låt Möbiusavbildningen

$$T(z) = \frac{z-3}{z+5}$$

vara given. Finn bilden under denna avbildning av området

$$G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Möbiusavbildningen $w = T(z)$ skickar reella axeln på sig själv, och imaginära axeln på cirkeln $|w - \frac{1}{5}| = \frac{4}{5}$. Vi ser av detta att $T(G)$ kan vara ett av de fyra olika områdena som avgränsas av dessa två kurvor (cirkeln och reella axeln). Instoppning av lämplig punkt, t ex $z = 3+i$, visar att det blir området som ges av $|w - \frac{1}{5}| < \frac{4}{5}$ och $\operatorname{Im} w > 0$.

Del B.

6. Finns det någon funktion $f(z)$ som är analytisk i skivan $|z| < 1$, sådan att

$$f(3^{-n}) = 27^{-n} \quad \text{för } n = 1, 2, 3, \ldots?$$

Om den finns, är den i så fall entydig? Blir svaret annorlunda om vi byter 27 mot 28?

Funktionen $f(z) = z^3$ uppfyller villkoren. Eftersom följden 3^{-n} hopar sig i origo som är en inre punkt är funktionen entydig. Om vi byter 27 mot 28 finns ingen sådan funktion, vilket intuitivt kan ses av att funktionen borde vara $z^{(\ln 28)/\ln 3}$ vilken har en slits från origo och utåt (förgreningspunkt).

---

7. Formulera och bevisa residusatsen.

Se läroboken.

---

8. Beräkna den generaliserade Riemannintegralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

med hjälp av residukalkyl. Var noggrann i dina motiveringar!

Man inser att p g a symmetri kan vi integrera längs hela reella axeln om vi dela med 2. Eftersom $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ betraktar vi funktionen $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{4z^2}$ och integrerar över ett en kurva där man undviker den singulära punkten i origo. Svaret blir efter en hel del räkning $\frac{\pi}{2}$.

---

9. Formulera och bevisa argumentprincipen (för analytiska funktioner).

Se läroboken.