Institutionen för matematik
KTH
Håkan Hedenmalm

Tentamen i Komplex analys, SF1628, den 20 december 2017

Skrivtid 08.00-13.00. Inga hälpmedel är tillåtna utöver skrivdon och suddgummi. Skriv tydliga lösningar med utörliga motiveringar.

För del **A** gäller följande. Uppgifterna poängsätts med maximalt 5 poäng per uppgift. 14 poäng ger betyg E. 13 poäng ger betyg Fx, med rätt till komplettering.

Bonuspoäng tillgodoräknas enligt beskrivning på kurssidan.

Avseende del **B** gäller följande. Först måste man vara godkänd på del **A** med betyg D, antingen via kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter eller alternativt med komplettering med poäng erhållna på del A enligt ovan.

Betygsättningen görs sedan enligt beskrivning på kurssidan.

Lycka till!

Del A.

1. Finn alla komplexa tal z sådana att $\cos z = 15$.

2. Låt funktionen u vara på formen

$$u(z) = u(x, y) = x^3 - bxy^2,$$

där b är en reell konstant. Antag att u är harmonisk. Vad måste då b vara? Bestäm för detta värde på b ett harmoniskt konjugat till u.

3. Funktionen

$$f(z) = \frac{2}{1+z^2}$$

kan utvecklas i Laurentserie omkring punkten $z = i$. Det finns två möjliga konvergensområden för sådana Laurentserier. Ange dessa områden samt beräkna de två serierna.

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(x^2 - 6x + 12)^2}$$

med hjälp av residukalkyl.

5. Låt Möbiusavbildningen

$$T(z) = \frac{z - 3i}{z + 3i}$$

vara given. Finn bilden under denna avbildning av området

$$G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Del B.

6. Finns det någon funktion $f(z)$ som är analytisk i skivan $|z| < 1$, sådan att

$$f(2^{-n}) = 4^{-n} \quad \text{för } \; n = 1, 2, 3, \ldots ?$$

Om den finns, är den i så fall entydig?

7. Formulera och bevisa maximumprincipen för analytiska funktioner.

8. Beräkna den generaliserade Riemannintegralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin(3x)}{x} dx$$

medelst Residukalkyl. Var noggrann i dina motiveringar!

9. Formulera och bevisa argumentprincipen.