Institutionen för matematik
KTH
Håkan Hedenmalm

Tentamen i Komplex analys, SF1628, den 20 oktober 2017

Skrivtid 14.00-19.00. Inga hälpmedel är tillåtna utöver skrivdon och suddgummi. Skriv tydliga lösningar med utörliga motiveringar.

För del **A** gäller följande. Uppgifterna poängsätts med maximalt 5 poäng per uppgift. 14 poäng ger betyg E. 13 poäng ger betyg Fx, med rätt till komplettering.

Bonuspoäng tillgodoräknas enligt beskrivning på kurssidan.

Avseende del **B** gäller följande. Först måste man vara godkänd på del **A** med betyg D, antingen via kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter eller alternativt med komplettering med poäng erhållna på del A enligt ovan.

Betygsättningen görs sedan enligt beskrivning på kurssidan.

Lycka till!

Del A.

1. Finn alla komplexa tal z sådana att $\tan z = i$.

2. Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk i ett öppet område Ω i komplexa talplanet. Låt $u(z) = \text{Re f(z)}$ och $v(z) = \text{Im f(z)}$ på Ω. Visa att den associerade funktionen

$$h(z) = e^{v(z)} \cos(u(z))$$

är harmonisk i Ω.

3. Funktionen

$$f(z) = \frac{z^{-100}}{1+z}$$

har en singularitet i origo. Vilken typ av singularitet handlar det om? Laurentserieutveckla funktionen i ringområden runt origo som är så stora som möjligt. Obs! Det blir två olika ringområden.

4. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \sin t - \cos t}.$$

5. Finn en Möbiusavbildning $w = f(z)$ som avbildar skivan $|z| < 1$ på halvplanet $\mathrm{Re}\, w > 1$ sådan att $f(0) = 2$.

Del B.

6. Undersök vilka hela funktioner $f(z)$ som satisfierar olikheten

$$|f(z)| \leq |z|^a$$

för alla komplexa z. Här antas a vara ett reellt tal med $2 < a < 3$. Vi minns här att en funktion sägs vara *hel* om den är analytisk i hela komplexa talplanet.

7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats.

8. Beräkna residuintegralen

$$\int_\Gamma \frac{dz}{e^z - 1},$$

där Γ är cirkeln med centrum i origo och radie $R = 20$.

9. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling för en funktion som är analytisk i en öppen cirkelskiva.