Institutionen för matematik
KTH
Håkan Hedenmalm

Lösningsförslag: Tentamen i Komplex analys, SF1628, den 20 oktober 2017

Del A.

1. Finn alla komplexa tal z sådana att $\tan z = i$.

Vi skriver

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} = -i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = -i\frac{w-w^{-1}}{w+w^{-1}} = -i\frac{w^2-1}{w^2+1},$$

där $w = e^{iz}$. Då ser vi direkt att $\tan z = i$ är samma som att

$$\frac{w^2-1}{w^2+1} = -1,$$

vilket inträffar precis då $w = 0$. Men $w = e^{iz} \neq 0$ alltid så ekvationen $\tan z = i$ saknar komplexa rötter.

---

2. Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk i ett öppet område Ω i komplexa talplanet. Låt $u(z) = \mathrm{Re\ f(z)}$ och $v(z) = \mathrm{Im\ f(z)}$ på Ω. Visa att den associerade funktionen

$$h(z) = e^{v(z)}\cos(u(z))$$

är harmonisk i Ω.

Funktionen $F(z) = e^{if(z)}$ blir analytisk och dess realdel är funktionen h.

---

3. Funktionen

$$f(z) = \frac{z^{-100}}{1+z}$$

har en singularitet i origo. Vilken typ av singularitet handlar det om? Laurentserieutveckla funktionen i ringområden som är så stora som möjligt. Obs! Det blir två olika ringområden.

Vi Taylorutvecklar $(1+z)^{-1}$ för $|z|<1$ med formeln för geometrisk summa:

$$(1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Då blir alltså Laurentserien i ringen $0<|z|<1$ given av

$$f(z) = \frac{z^{-100}}{1+z} = z^{-100} - z^{-99} + z^{-98} - z^{-97} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-100}$$

och vi ser att singulariteten är en pol av ordning 100. I den återstående ringen $1<|z|<\infty$ är

$$(1+z)^{-1} = (z(1+z^{-1}))^{-1} = z^{-1}(1+z^{-1})^{-1} = z^{-1}(1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}+\cdots)$$
$$= z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1},$$

så att Laurentserien i ringen $1<|z|<\infty$ är

$$f(z) = \frac{z^{-100}}{1+z} = z^{-101} - z^{-102} + z^{-103} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-101}.$$

---

4. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2-\sin t-\cos t}.$$

Vi skriver

$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}, \qquad \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2},$$

och observerar att med parametriseringen $\zeta = e^{it}$ går vi ett varv runt enhetscirkeln i positiv led, och dessutom är $d\zeta = ie^{it}dt$, dvs $dt = \frac{d\zeta}{i\zeta}$. Detta leder till att

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2-\sin t-\cos t} = \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{i\zeta(2-\frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2i}-\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2})}.$$

vilket vi förenklar till

$$2\int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{4i\zeta-(1+i)\zeta^2+1-i}.$$

Vi vill hitta residuerna. För detta behöver vi rötterna till nämnaren, dvs $4i\zeta - (1+i)\zeta^2 + 1 - i = 0$. Detta är en andragradsekvation och vi finner att $\zeta = (1+i)(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$. En av de två rötterna har $|\zeta| < 1$, nämligen $\zeta_1 = (1+i)(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Om vi skriver $F(\zeta) = 4i\zeta-(1+i)\zeta^2+1-i$ blir $F(\zeta_1) = 0$ medan

$$F'(\zeta_1) = 4i - 2(1+i)\zeta_1 = 4i - 2(1+i)^2(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}i$$

så att Taylorutvecklingen av F kring ζ_1 blir $F(\zeta) = F'(\zeta_1)(\zeta-\zeta_1)+\cdots$ och residun till $2/F(\zeta)$ i ζ_1 blir $2/F'(\zeta_1) = (\sqrt{2}i)^{-1}$. Enligt residusatsen blir nu till slut

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \sin t - \cos t} = 2\pi i(\sqrt{2}i)^{-1} = \pi\sqrt{2}.$$

---

5. Finn en Möbiusavbildning $w = f(z)$ som avbildar skivan $|z| < 1$ på halvplanet $\mathrm{Re}\, w > 1$ sådan att $f(0) = 2$.

En sådan Möbiusavbildning är t ex $w = \frac{2}{1-z}$.

Del B.

6. Undersök vilka hela funktioner $f(z)$ som satisfierar olikheten

$$|f(z)| \le |z|^a$$

för alla komplexa z. Här antas a vara ett reellt tal med $2 < a < 3$. Vi minns här att en funktion sägs vara *hel* om den är analytisk i hela komplexa talplanet.

Cauchy-uppskattningarna visar att $f'''(z) = 0$ identiskt, dvs f måste vara ett polynom av grad 2 eller lägre. Men ett sådant polynom kan inte avta så starkt kring $z = 0$ och därför är $f(z) = 0$ enda lösningen.

---

7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats.

Se LB.

---

8. Beräkna residuintegralen

$$\int_\Gamma \frac{dz}{e^z - 1},$$

där Γ är cirkeln med centrum i origo och radie $R = 20$.

Vi tillämpar residusatsen och letar efter rötter till $e^z - 1 = 0$ innanför Γ. Rötterna är med nödvändighet $z = 2\pi ni$ för heltal n, och $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ är de enda med $|z| < 20$. Kring punkten $z_n = 2\pi ni$ utvecklar vi enligt Taylor $e^z - 1 = e^{z_n}(z - z_n) + \cdots$ och ser att residun till $1/(e^z - 1)$ blir $e^{z_n} = 1$. Vi får sju sådana bidrag, så enligt residusatsen blir nu (multiplicera 7 med $2\pi i$):

$$\int_\Gamma \frac{dz}{e^z - 1} = 14\pi i.$$

---

9. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling för en funktion som är analytisk i en öppen cirkelskiva.

Se LB.