

Kontrollskrivning, 2016-09-18, kl. 08.00–10.00.

SF1628 Komplex analys, för F.

Kontrollskrivning 1. Skriv namn och personnummer:

1. Funktionen

$$u(x, y) = 5x + 7y + 2x^2 + 8xy - 2y^2$$

är realdel till en funktion $f(z)$, som är analytisk i hela planet och uppfyller att $f(0) = 3i$. Bestäm härur funktionen $f(z)$. Om du kan, uttryck f som en funktion av z .

(3)

$$f(z) = (2 - 4i)z^2 + (5 - 7i)z + 3i.$$

2. Finn alla komplexa tal z så att $\sin z = 10$.

(3)

$\sin z = 10$ är samma som att $e^{iz} - e^{-iz} = 20i$. Skriver vi $w = e^{iz}$ så har vi ekvationen $w - w^{-1} = 20i$, dvs $w^2 - 20iw - 1 = 0$. Vi får att $w = 10i \pm \sqrt{-100 + 1} = i(10 \pm \sqrt{99})$. Logaritmering ger $iz = \ln(10 \pm \sqrt{99}) + i\frac{\pi}{2} + i2n\pi$ dvs $z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi - i \ln(10 \pm \sqrt{99})$. Här är n ett heltal.

3. Beräkna den komplexa kurvintegralen

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 2iz'}$$

där Γ är enhetscirkeln $|z| = 1$ i positiv led.

(3)

Eftersom singulariteten $z = -2i$ ligger utanför enhetscirkeln får vi

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 + 2iz} = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z + 2i)} = 2\pi i \frac{1}{z + 2i} \Big|_{z=0} = \pi.$$